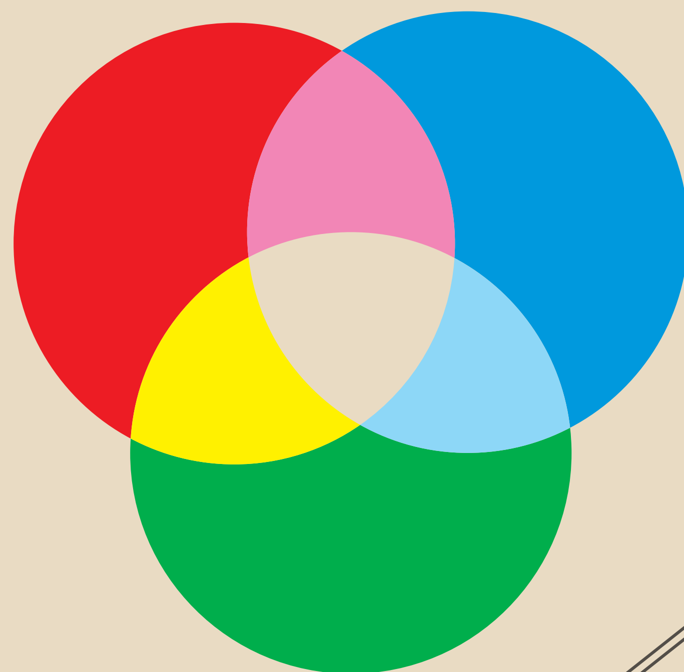
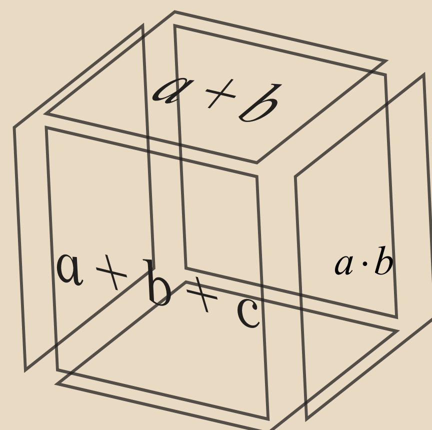
وزارت معارف

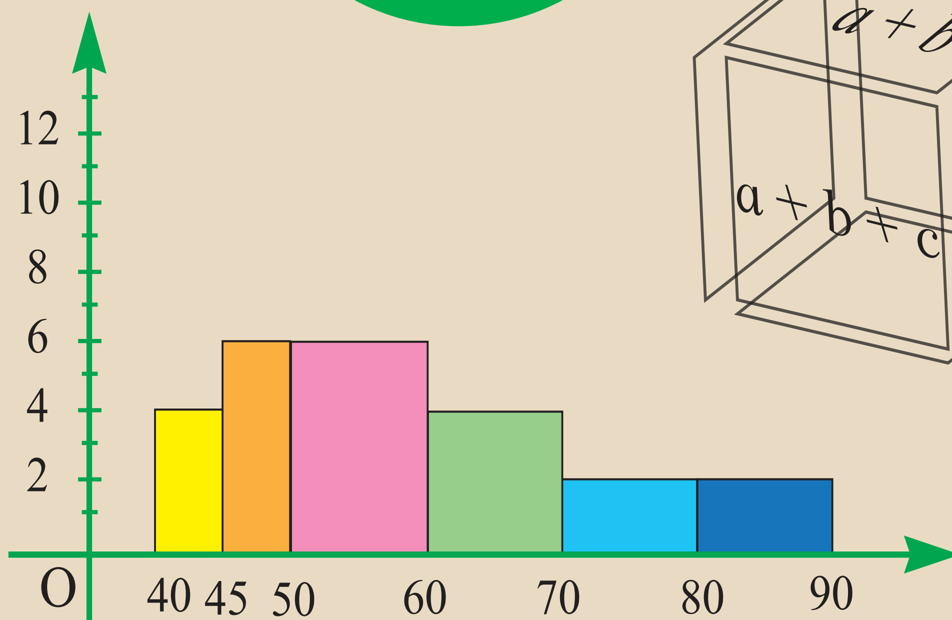
ریاضی

صنف ۹

ریاضی صنف ۹









۱۳۹۸ هـ. ش.



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی
صنف ۹

۱۳۹۸

هـ.ش

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی نصاب تعلیمی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: نهم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامهٔ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهۀ سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادۀ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعۀ نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندۀ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادۀ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه‌یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

فهرست

صفحه

فهرست صفحه

فصل اول

دایـره




GITANE

دایـــره
CIRCLE

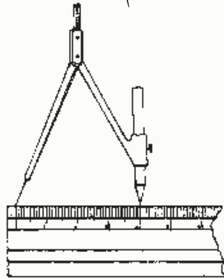


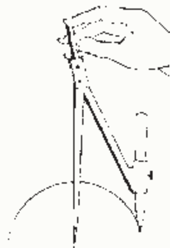


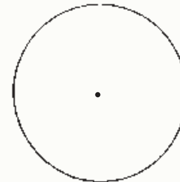
به شـــکل مقابل توجه کنید و اشکال هندســـی یـــی را که در شـــکل دیده می‌شوند، نام ببرید.

فعالیت

یک نقطه را روی کاغذ تعیین کنید و به اطراف این نقطه به فاصلهٔ 4cm پرکار را مکمل دور بدهید؛ شکل تشکیل شده و نقطهٔ تعیین شده، چه نام دارد؟

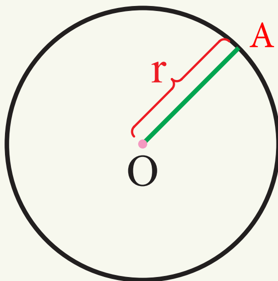




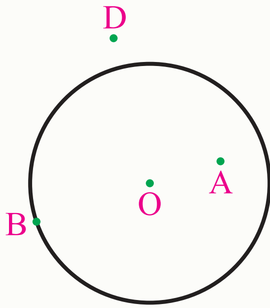


تعریف

ســـت تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطهٔ ثابت فاصلهٔ مساوی داشـــته باشد، دایره نامیده می‌شود. یا بـــه عبارت دیگر منحنی بســـته‌یی کـــه از یک نقطهٔ ثابت فاصلهٔ مساوی داشـــته باشد، به‌نام محیط دایره و نقطـــهٔ ثابـــت را مرکز دایره می گویند و به شـــکل $C(o,r)$ نمایش داده می‌شـــود. در شـــکل، مرکز دایره به حرف (o) و شـــعاع آن، به حرف(r) نشان داده شده است.



فعالیت



- در شکل مقابل موقعیت نقاط B, A و D را نظر به دایره تعیین نمایید.
- فاصلهٔ نقاط را از مرکز دایره اندازه نموده، با طول شعاع مقایسه کنید.
- سه نقطهٔ دلخواه دیگر را در داخل دایره، روی دایره و بیرون دایره در نظر بگیرید. آیا رابطهٔ دریافت شده، برای این نقاط نیز درست است؟

نتیجه

1- ست نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، نقاط ساحهٔ داخلی دایره گفته می‌شود یا: $I = \{A / |\overline{OA}| < r\}$

2- ست نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره مساوی به شعاع دایره باشد، نقاط محیط دایره گفته می‌شود یا: $C = \{B / |\overline{OB}| = r\}$

3- ست نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، نقاط ساحهٔ خارجی دایره گفته می‌شود یا: $E = \{D / |\overline{OD}| > r\}$

4- قسمتی از مستوی که توسط محیط دایره و سطح داخلی آن جدا می‌شود، سطح دایره نامیده می‌شود.

تمرین

1- دایره‌یی به شعاع 2cm رسم کنید. کدام یک از نقاط زیر در داخل دایره، خارج دایره و روی دایره قرار دارند:

- فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره 1.4cm است.
- فاصلهٔ نقطهٔ B از مرکز دایره 2.3cm است.
- فاصلهٔ نقطهٔ C از مرکز دایره صفر است.
- فاصلهٔ نقطهٔ D از مرکز دایره $\frac{4}{2}$ cm است.

2- توضیح دهید، چه وقت یک نقطه در روی دایره قرار می‌گیرد؟



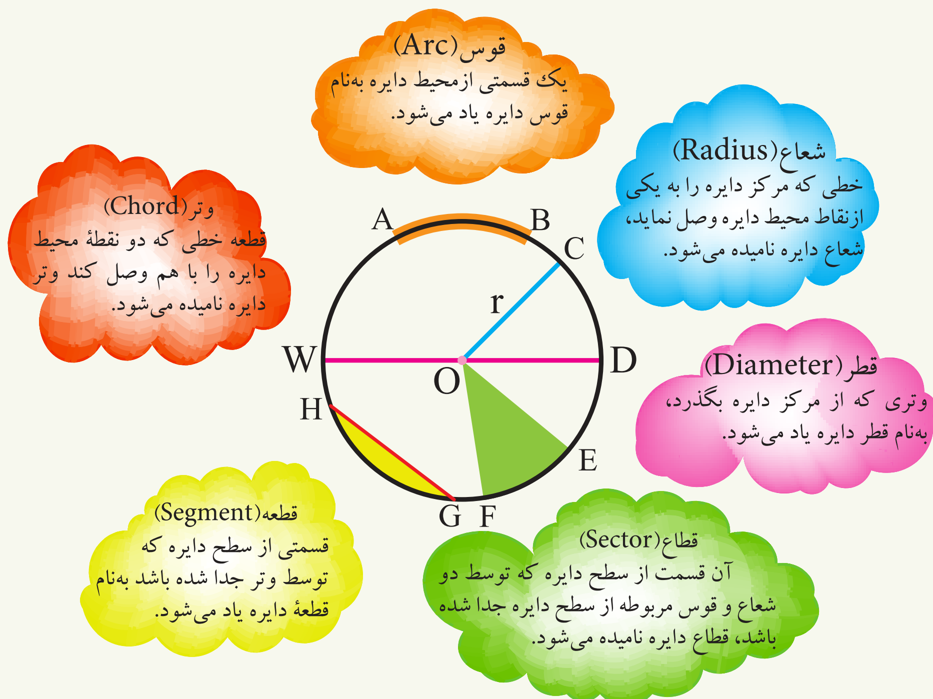
عناصر دایره
Elements of a Circle



به شکل مقابل توجه نمایید، روی کیک کدام شکل هندسی دارد؟ قسمت قطع شدهٔ آن، کدام عنصر دایره را نشان می‌دهد؟

تعریف

ابتدا شکل دایره و تعریف‌های مربوط عناصر آن‌را در کتابچه‌های تان انتقال و بعد تعریف‌های مربوط هر عنصر دایره را به شکل مربوط آن وصل کنید.



فعالیت

- دایره‌یی به شعاع 4 سانتی متر رسم کنید. بعد دایرۀ مذکور را قیچی کنید.
- این دایره را طوری قات کنید که دو نیم‌دایره بالای هم قرار گیرند.
- کاغذ را باز کنید و بگویید، خط قات شده را که روی کاغذ می‌بینید، چه نام دارد؟
- این بار دو نیم‌دایره را دوباره قات نموده، آن را باز کنید. چند قطعه خط را می بینید؟ هر کدام چه نام دارد؟
- چهار زاویۀ تشکیل شده را اندازه نموده، بگویید که با همدیگر چه رابطه دارند؟
- رابطۀ قطر با شعاع دایره چیست؟
- دایره را طوری قات کنید که دو قسمت نامساوی تشکیل شود. آن را باز کنید، خط تشکیل شده چه نام دارد؟ اندازۀ آن را با قطر دایره مقایسه کنید.

نتیجه:

- همان طوری که دیدیم، هر گاه در هر دایره دو نقطۀ دایره را به هم وصل کنیم، یک وتر تشکیل می‌شود.
- در هر دایره بزرگ‌ترین وتر، قطر دایره است که دو برابر شعاع می‌باشد.
- در یک دایره هر قطر، وتر است؛ ولی هر وتر قطر نیست.
- قوسی که از نصف محیط دایره کوچک‌تر باشد، به نام قوس کوچک (minor Arc) یاد می گردد.
- قوسی که از نصف محیط دایره بزرگ‌تر باشد، به نام قوس بزرگ (majorArc) یاد می گردد.

تمرین

دایرۀ C(O,4) را رسم نمایید.

a) شعاع، قطر، قطعه و قطاع را در شکل نشان دهید.

b) طول قطر دایره را تعیین نمایید.

c) اگر محیط آنرا به چهار حصۀ مساوی تقسیم نمایید؛ از آن چه نتیجه می گیرید.

d) ساحۀ خارجی، داخلی و روی دایره را به رنگ‌های مختلف نشان دهید.

حالت‌های یک مستقیم با دایره

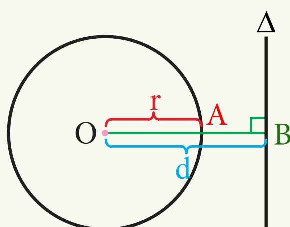


به شکل مقابل توجه نموده، بگویید،شکل‌ها با دایره در کدام حالت‌ها قرار دارند، هر یک را توضیح دهید.

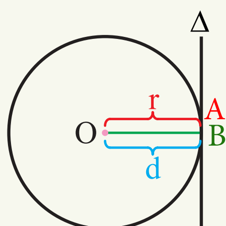
فعالیت

- یک دایره ویک خط مستقیم را طوری رسم نمایید که با دایره یک نقطه، دو نقطه و هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشد.
- از مرکز دایره به هر یک از این خطوط، عمودها رسم نموده، فاصلهٔ مرکز دایره از خط را اندازه نمایید و هر حالت را با شعاع دایره مقایسه نمایید.

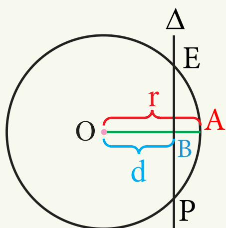
از انجام فعالیت بالا دیده می‌شود که یک خط مستقیم و دایره نسبت به هم سه حالت زیر را دارد:



1- اگر مستقیم Δ با دایره نقطهٔ مشترک نداشته باشد؛ مستقیم Δ خارج دایره قرار دارد. در این‌صورت فاصلهٔ مستقیم Δ از مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است، یعنی: $d > r$

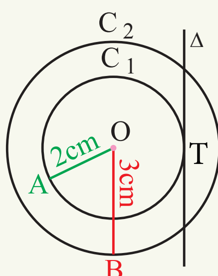


2- اگر مستقیم Δ با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد، مستقیم را مماس به دایره گویند. در این حالت فاصله مستقیم Δ از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است؛ یعنی: $d = r$



3- اگر مستقیم Δ با دایره دو نقطهٔ مشترک داشته باشد، مستقیم را قاطع گویند. در این حالت فاصلهٔ مستقیم Δ از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است، یعنی: $d < r$

مثال: نقطهٔ O را در نظر می گیریم، دو دایرهٔ متحدالمرکز با مرکز O با شعاع‌های 2 و 3 سانتی متر را رسم نمایید. فاصلهٔ مستقیم Δ از مرکز دایره با شعاع‌های هر دو دایرهٔ C_1 و C_2 چه رابطه دارد؟



حل: در شکل دیده می‌شود که:

فاصلهٔ خط Δ از مرکز دایره C_1 برابر با شعاع آن دایره است؛ یعنی: $d=r$

فاصلهٔ خط Δ از مرکز دایره C_2 کوچک‌تر از شعاع دایره است؛ یعنی: $d<r$

تمرین

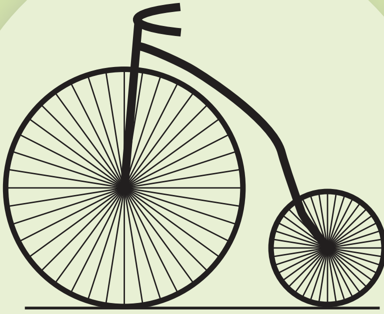
1- دایره‌یی به شعاع 3cm رسم نموده، در این دایره خطوطی به فاصله‌ها ی دادهٔ شدهٔ زیر را رسم و حالت آنرا بیان نمایید.

الف: فاصلهٔ خط از مرکز دایره 2.5cm باشد.

ب: فاصلهٔ خط از مرکز دایره 4cm باشد.

ج: فاصلهٔ خط از مرکز دایره برابر با شعاع باشد.

موقعیت دو دایره نظر به یکدیگر



به شـکل مقابل توجه نمـوده، بگویید که:

1- ارابه‌های بایسکل دارای کدام شکل هندسی اند؟

2- ارابه‌هـا بـه چند حالت بـا هم قرار گرفته می‌توانند؟

فعالیت

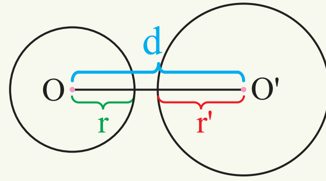
- دو دایره را طوری رسم نمایید که:

1: با هم یک نقطهٔ مشترک داشته باشد. 2: با هم دو نقطهٔ مشترک داشته باشد.

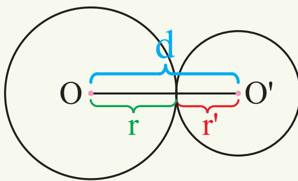
3: با هم هیچ نقطهٔ مشترک نداشته باشد.

- فاصلهٔ مراکز دایره‌ها را در هر یک از حالات فوق با شعاع آن‌ها مقایسه کنید.

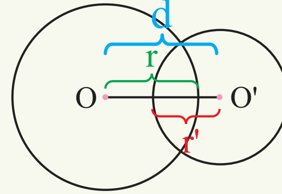
از اجرای فعالیت فوق به نتیجهٔ زیر می‌رسیم که:



اگر فاصله بین مراکز دو دایره بزرگ‌تر از مجموع طول شعاع‌های دایره‌ها باشد، در این‌صورت دایره‌ها را غیر متقاطع گویند؛ یعنی: $d > r + r'$

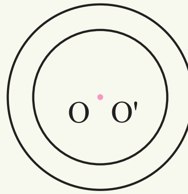


اگر فاصله بین مراکز دو دایره مساوی به مجموع طول شـعاع‌ها باشد، در این صورت دو دایـره را ممـاس گویند، یعنی: $d = r + r'$



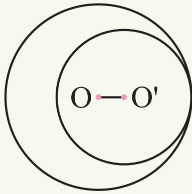
اگر فاصله بین مراکز دو دایره کوچک‌تر از مجموع طول شعاع‌ها و بزرگ‌تر از حاصل تفریق قیمت مطلقهٔ شعاع‌های دایره‌ها باشد، دو دایره با هم متقاطع‌اند.

$$|r-r'|<d<r+r'$$



اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد به نام دایره‌های متحدالمرکز یاد می‌شوند؛ یعنی:

$$d=0$$



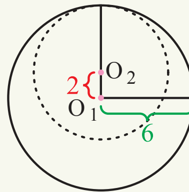
اگر فاصله بین مرکزهای دو دایره مساوی به حاصل تفریق قیمت مطلقهٔ شعاع‌های دو دایره باشد، دوایر را داخلاً مماس گویند، یعنی:

$$d=|r-r'|$$

مثال: دو دایره را طوری رسم نمایید که شعاع دایرهٔ اولی 6cm، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ دوم از مرکز دایرهٔ اول 2cm و شعاع دایرهٔ دوم $\frac{2}{3}$ شعاع دایرهٔ اول باشد. در این حالت، دو دایره نسبت به هم چه موقعیت دارند؟

حل: اگر شعاع دایرهٔ اول را r_1 و شعاع دایرهٔ دوم را r_2 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} r_1=6cm \\ r_2=\frac{2}{3}r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2=\frac{2}{3}\times 6cm \\ r_2=4cm \end{array}$$



چون: $d=|r_1-r_2|=|6-4|=|2|=2$

بنابراین دایره‌های داخل هم با هم مماس‌اند.

تمرین

دو دایره را به شعاع‌های 6cm و 4cm در نظر گرفته، طور رهنمود زیر آن‌ها را با هم رسم نمایید.

الف: دایره‌ها خارجاً مماس باشد.

ب: دایره‌ها داخلاً مماس باشد.

ج: دایره‌ها متقاطع باشد.

د: دایره‌ها غیر متقاطع باشد.

هـ: دایره‌ها متحدالمرکز باشد.



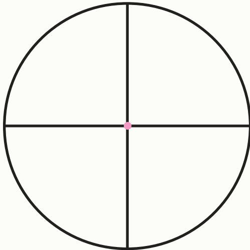
زاویه‌های مربوط به دایره
Angles of a Circle



زاویه مرکزی دایره

به تصویر مقابل توجه نمایید:
اشکال هندسی یی را که در آن مشاهده می کنید، نام ببرید.

فعالیت

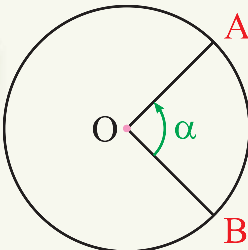


- در شکل بالا چند زاویه دیده می شود؟
- خصوصیت‌های مشترک این زاویه‌ها چیست؟
- دایرۀ $C(O,3)$ را رسم کنید.
- دو قطر عمود بر هم را در این دایره رسم نمایید.
- چند زاویۀ مرکزی تشکیل می گردد؟ اندازۀ قوس مقابل هر زاویه چند درجه است؟
- محیط این دایره چند درجه است؟

از نتیجۀ فعالیت فوق می‌توانیم بنویسیم:
طول یک قوس ارتباط به وسعت زاویۀ مرکزی آن دارد. یعنی:

$$\frac{\hat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$$

تعریف



زاویه‌یی که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از دو شعاع دایره تشکیل شده باشد، به‌نام زاویۀ مرکزی یاد می گردد، مانند زاویۀ AOB یا زاویۀ α.
اضلاع هر زاویۀ مرکزی را از محیط دایره، یک قوس جدا

می‌نماید که این قوس مساوی به زاویهٔ مرکزی می‌باشد، مانند قوس $\overset{\frown}{AB}$ که مساوی به زاویهٔ α است.

بنابر این می‌گوییم که: اندازهٔ قوس مقابل زاویهٔ مرکزی در دایره بر حسب درجه مساوی به زاویهٔ مرکزی است؛ یعنی: $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

مثال 1: در دایرهٔ $C(O,r)$ قوس بزرگ پنج چند قوس کوچک است. اندازهٔ قوس کوچک، اندازهٔ قوس بزرگ و زاویهٔ مرکزی مقابل آنها را دریابید.

حل: اگر قوس کوچک $\overset{\frown}{PQ} = x$ باشد پس قوس بزرگ آن $\overset{\frown}{PAQ} = 360^\circ - x$ است؛ لذا می‌توانیم، بنویسیم که:

$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^\circ$

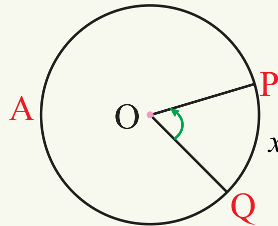
$\overset{\frown}{PAQ} = 5\overset{\frown}{PQ}$

$x + 5x == 360^\circ$

$6x == 360^\circ$

$x = 60^\circ$

$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$



مثال 2: در شکل زیر اگر زاویهٔ $K\hat{O}S = 31^\circ$ ، $E\hat{O}J = 82^\circ$ و EK قطر دایره باشد، قوس‌های $\overset{\frown}{SK}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SJ}$ و $\overset{\frown}{ES}$ را به درجه محاسبه کنید.

$\overset{\frown}{SK} = S\hat{O}K = 31^\circ \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^\circ$ قوس مقابل زاویهٔ مرکزی

$K\hat{O}J = 180^\circ - E\hat{O}J = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$

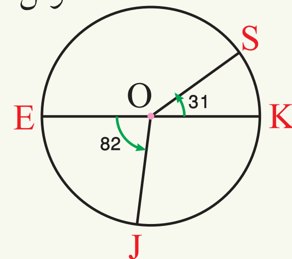
$K\hat{O}J = \overset{\frown}{KJ} = 98^\circ$

$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$

$\overset{\frown}{JE} = E\hat{O}J = 82^\circ$

$E\overset{\Delta}{O}S = 180^\circ - S\overset{\Delta}{O}K = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$

$E\overset{\Delta}{O}S = \overset{\frown}{ES} = 149^\circ$

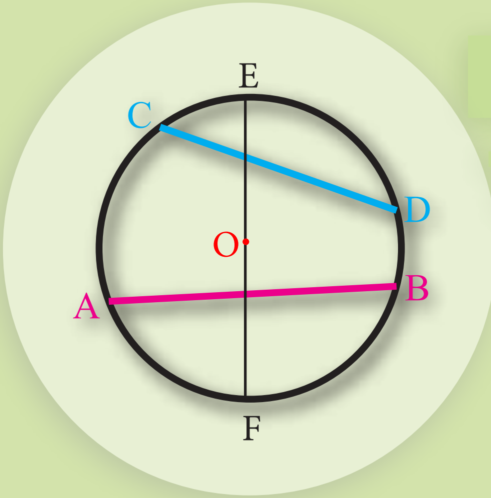


تمرین

1- سه نقطهٔ A, B و C بالای محیط دایرهٔ $C(O,r)$ طوری قرار دارند اگر $A\hat{O}B = 75^\circ$ و $B\hat{O}C = 136^\circ$ دو زاویهٔ دو طرفهٔ خط OB باشد قوس $\overset{\frown}{AC}$ را محاسبه نمایید.

2- یک زاویهٔ مرکزی رسم نمایید که اندازهٔ آن 180° باشد.

خصوصیت های وتر دایره



به شکل مقابل توجه نمایید، خطوط AB، CD و EF را به‌نام چه یاد می‌کنند؟

خصوصیت مستقیم EF چیست و با AB و CD چه ارتباط دارد؟

فعالیت

در دایرهٔ $C(O,r)$ وتر AB را رسم کنید.

قطر ED دایره را طوری رسم نمایید که مثلثی بر وتر AB در نقطهٔ H عمود باشد.

نقطهٔ (O) را به A و B وصل نمایید، مثلثی که تشکیل می‌شود، چه نوع مثلث است؟

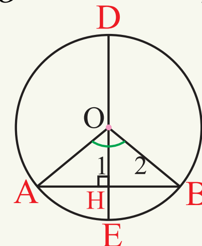
در جاهای خالی علامت مناسب($=,<$ یا $>$) را بگذارید.

$\overline{OA}\ \square\ \overline{OB}\quad , \quad \overset{\frown}{AE}\ \square\ \overset{\frown}{EB}\quad , \quad \overline{AH}\ \square\ \overline{HB}$

از نتیجهٔ این فعالیت می‌توانیم طور زیر قضیه را بیان و ثبوت نماییم.

قضیه: در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و قوس‌های مقابل آن‌ها را تنصیف می‌کند.

ثبوت: از دو مثلث $A\overset{\Delta}{\underset{1}{HO}}$ و $B\overset{\Delta}{\underset{2}{HO}}$ می‌توانیم بنویسیم که:



$OA = OB$......... شعاع دایره

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2$.......... قایمه

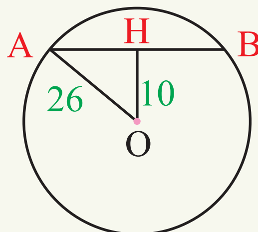
$OH = OH$........ مشترک

$\Rightarrow A\overset{\Delta}{H}O \cong O\overset{\Delta}{H}B$

بنابراین از تساوی دو مثلث، چنین نتیجه به دست می‌آید که $\overline{AH} = \overline{HB}$ و زاویه‌های مرکزی BOH_2 و AOH_1 با هم مساوی بوده، در نتیجه $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$ است.

مثال: دایرهٔ $C(O,26)$ داده شده؛ اگر فاصلهٔ عمودی وتر AB از مرکز دایره 10 واحد باشد، طول وتر AB را محاسبه کنید.

حل: در مثلث $\overset{\triangle}{OHA}$ نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم که:



$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\overline{AH} = 24$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48\,\text{unit}$$

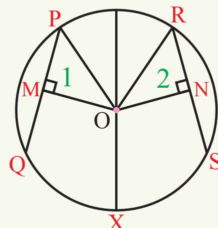
فعالیت

- دایرهٔ $C(O,3)$ را ترسیم نمایید.
- در دایره دو وتر مساوی PQ و RS را رسم نمایید.
- از مرکز دایره بالای PQ و RS عمودها را رسم کنید، طول آن‌ها را اندازه کنید.

از نتیجهٔ این فعالیت، قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه: وترهای مساوی، از مرکز دایره هم‌فاصله‌اند.

ثبوت: از دو مثلث RNO و PMO داریم که:



$\overline{OP} = \overline{OR}$ ....شعاع دایره

$\hat{1} = \hat{2}$ ....قایمه

$\overline{PQ} = \overline{RS}$ ....وترهای مساوی

$\dfrac{\overline{PQ}}{2} = \dfrac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow PM = RN$

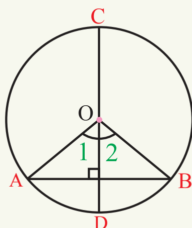
$\Rightarrow \overset{\triangle}{PMO} \cong \overset{\triangle}{RNO}$

$\overline{OM} = \overline{ON}$

در نتیجه گفته می‌توانیم که در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز هم‌فاصله‌اند.

تمرین

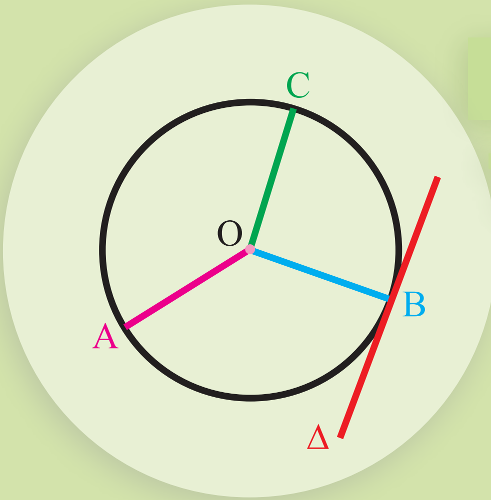
1- در دایرهٔ $C(O,13)$ وتر AB از مرکز دایره به فاصلهٔ پنج واحد قرار دارد، طول AB را دریابید.



2- ثبوت کنید، در هر دایره قطری که از وسط وتر بگذرد، بالای آن وتر عمود است.

3- در یک دایره وتر $AB=8cm$ را رسم کنید. اگر فاصلهٔ عمودی این وتر از مرکز دایره $OH=3cm$ باشد، طول قطر و محیط دایره را محاسبه نمایید.

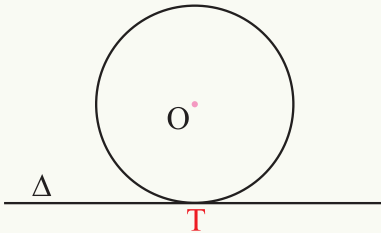
خصوصیت شعاع دایره



خطوط $\overline{OC}$، $\overline{OB}$ و $\overline{OA}$ به چه نام یاد می‌شوند.

ارتباط خط Δ با دایرهٔ O و شعاع $\overline{OB}$ در چیست؟

فعالیت

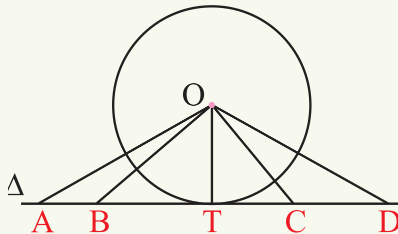


- درشکل مقابل خط مستقیم Δ به دایرهٔ $C(O,r)$ در نقطهٔ T مماس است.
- بالای مماس نقاط C, B, A و D را به دو طرف نقطهٔ T انتخاب و آن‌ها را به مرکز دایره وصل نمایید.
- قطعه خط‌ها ی تشکیل شده را توسط خط‌کش اندازه نمایید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین مرکز دایره و مماس Δ را نشان دهید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و یک مستقیم، کدام فاصله است؟
- از دو فقره چه نتیجه می گیرید؟

از نتیجهٔ این فعالیت می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان و ثبوت نماییم.

قضیه: شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بالای مماس عمود است.

ثبوت: در شکل زیر دیده می‌شود که:



$OT < OB < OA$

$OT < OC < OD$

می‌دانیم که کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و یک خط مستقیم فاصلهٔ عمودی است.

در نتیجه گفته می‌توانیم که: $OT \perp \Delta$ است.

مثال 1: در شکل زیر، خط مستقیم Δ به دایرهٔ $c(o,r)$ در نقطهٔ A مماس است؛ اگر زاویهٔ AOB مساوی به 60° باشد، اندازهٔ زاویهٔ x را دریابید.

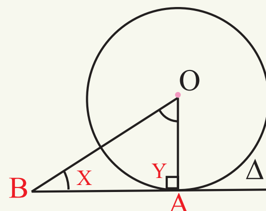
$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$



مثال 2: در شکل زیر خط مستقیم Δ به دایره $C(o,r)$ مماس است، اگر طول $\overline{OM}=4unit$ و $\overline{ON}=5unit$ باشد، طول $\overline{MN}$ را دریابید.

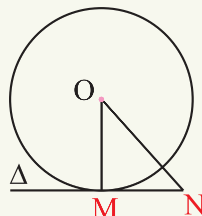
حل: می‌دانیم شعاع دایره در نقطهٔ تماس، بالای مماس عمود است، در نتیجه در مثلث قایم‌الزاویهٔ OMN با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌توانیم بنویسیم که:

$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\overline{MN} = 3$

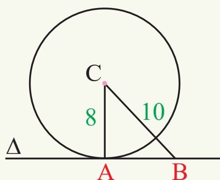


شعاع در نقطه تماس بالای مماس عمود است.

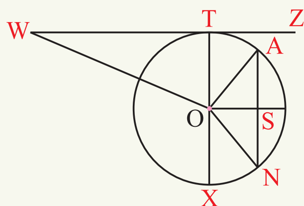
هر مماس در نقطهٔ تماس بالای شعاعی که از نقطهٔ تماس می‌گذرد، عمود است.

تمرین

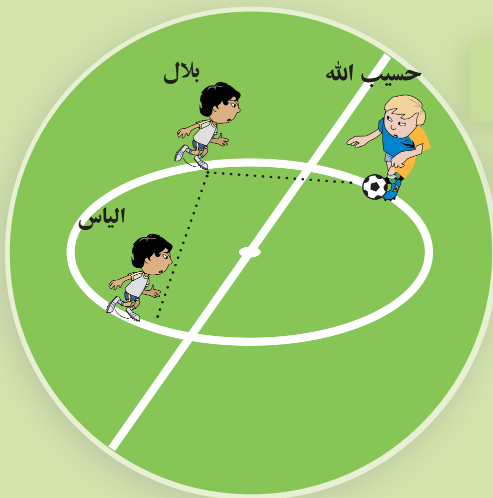
1- در شکل مقابل Δ بالای دایرهٔ $P(c,r)$ مماس است؛ اگر $\overline{AC}=8unit$ و $\overline{BC}=10unit$ طول داشته باشد، طول $\overline{AB}$ را دریابید.



2- در شکل مقابل اگر $\overline{WZ}$ در نقطهٔ T به دایرهٔ $C(O,r)$ مماس باشد و اگر $\overline{OS}=1unit$، $\overline{TW}=3unit$ و $\overline{OT}=2unit$ باشد، طول قطعه‌خط‌های OW,SN,AS,OA و TX را دریابید.



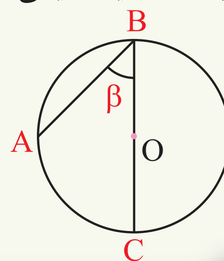
زاویهٔ محیطی دایره
Inscribed Angelof a Circle

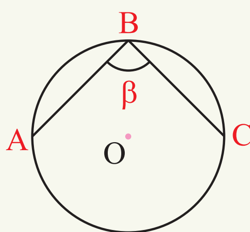


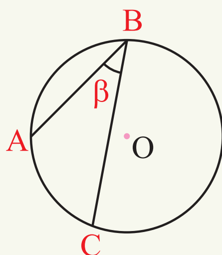
در شــکل مقابل، دایرهٔ مرکزی میدان فوتبال که حســیب‌الله بــه بلال و بلال به الیاس توپ را پاس می‌دهد. شــکلی را که از مســیر پاس دادن توپ تشکیل می گردد نام بگیرید.

تعریف

زاویه‌یی که رأس آن بالای محیط دایره واقع باشد و اضلاع آن از دو وتر دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ محیطی نامیده می‌شود؛ مانند زاویهٔ ABC یا زاویهٔ β.







فعالیت

- در دایرهٔ $C(O,r)$ زاویهٔ محیطی ABC را طوری رسم کنید که ضلع BC آن از مرکز دایره بگذرد.
- نقطهٔ A را به مرکز دایره O وصل نمایید. چه نوع مثلث تشکیل می‌شود؟
- زاویه‌هــای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ در مثلث OAB بــا هم چه ارتباط دارند؟
- زاویهٔ AOC چه رابطه یی با زاویه‌های A و B دارد؟

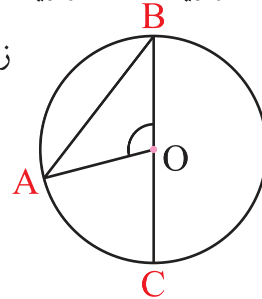
به خاطر بیاورید:
- وســعت زاویــهٔ مرکزی مســاوی به قوس مقابل آن است.
- وسعت هر زاویهٔ خارجی مثلث مســاوی به مجموعهٔ وســعت دو زاویــهٔ داخلی غیر مجاور آن است.

از فعالیت صفحهٔ قبل، می‌توانیم قضیه را طور زیر بیان و ثبوت نماییم.

قضیه: وسعت هر زاویهٔ محیطی مساوی به نصف قوس مقابل که توسط آن قطع شده، می‌باشد.

در این‌جا این قضیه را در حالتی که یکی از اضلاع زاویهٔ محیطی قطر دایره است، ثبوت می‌کنیم. ثبوت در حالت‌های متباقی، کار شاگردان می‌باشد.

ثبوت: زاویهٔ AOC زاویه خارجی مثلث AOB است، می‌توانیم بنویسیم که:



$A\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B}$

$\hat{A} = \hat{B}$ چرا......

$A\hat{O}C = \hat{B} + \hat{B}$

$A\hat{O}C = 2\hat{B}$

$\Rightarrow$

زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}C = \overset{\frown}{AC}$

$A\hat{O}C = 2\hat{B}$

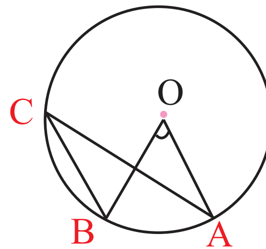
لذا: $\overset{\frown}{AC} = 2\hat{B}$

در نتیجه: $A\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

وسعت زاویهٔ محیطی ABC برابر به $\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ است.

مثال: در دایرهٔ $C(O,r)$ ؛ اگر زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = 60^\circ$ باشد، طول قوس AB و اندازهٔ زاویهٔ محیطی $A\hat{C}B$ را دریابید.

حل: در یک دایره از رابطه بین زاویهٔ مرکزی و قوس مقابل آن نوشته کرده می‌توانیم:



$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = 60^\circ \\ A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$

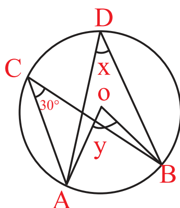
$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB} = 60^\circ \\ A\hat{C}B = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{C}B = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

تمرین

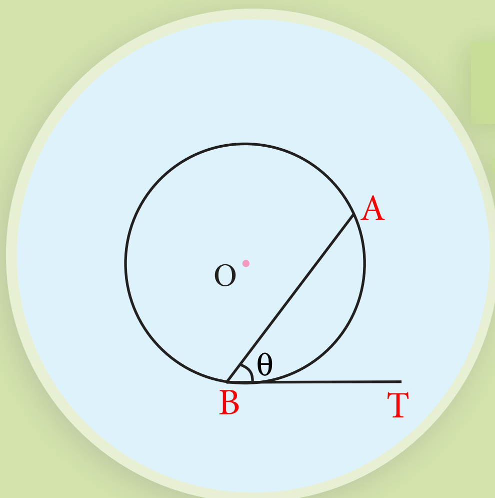
1- در یک دایره زاویهٔ محیطی رسم کنید که اندازهٔ آن 90° باشد؟

2- دو نقطهٔ A و B را روی محیط دایره در نظر بگیرید. چند زاویهٔ محیطی مساوی مقابل به قوس AB وجود دارد؟

3 – شکل ذیل را در نظر گرفته قیمت زاویه های مجهول را پیدا کنید.

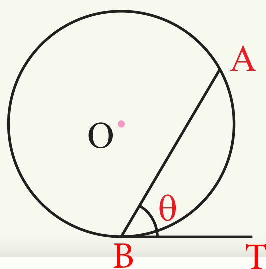


زاویهٔ مماسی دایره



نظر به شکل، خطوط مستقیمی که زاویهٔ θ را تشکیل نموده، نام بگیرید و بگویید، رأس زاویه در کدام قسمت دایره واقع است؟

تعریف



زاویه‌یی که یک ضلع آن با دایره مماس و ضلع دیگر آن، وتر دایره و رأس آن در نقطهٔ تماس بالای محیط دایره قرار داشته باشد، زاویهٔ مماسی گفته می‌شود. مانند زاویهٔ θ .

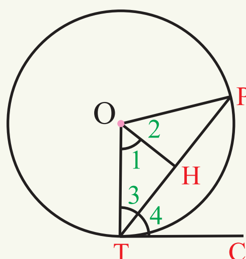
فعالیت

- دایرهٔ $C(O,r)$ را ترسیم نمایید.
- به دایرهٔ متذکره یک زاویهٔ مماسی CTP رسم نمایید.
- انجام‌های وتر PT را به مرکز دایره وصل نموده بگویید چه نوع مثلث تشکیل می‌گردد؟
- از مرکز دایره بالای وتر یک عمود رسم نمایید.
- اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $T\hat{O}P$ و زوایای مثلث‌های قایم‌الزاویهٔ تشکیل شده، چه رابطه با اندازهٔ زاویهٔ مماسی دارد؟

از نتیجهٔ این فعالیت می‌توانیم قضیه را به شکل زیر بیان و ثبوت نماییم.

قضیه: در یک دایره وسعت هر زاویهٔ مماسی مساوی به نصف قوس مقابل آن است.

ثبوت: از مثلث قایم‌الزاویهٔ $O\overset{\Delta}{H}T$ و زاویهٔ قایمهٔ $O\hat{T}C$ داریم که:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}\Rightarrow \hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{T\hat{O}P}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}\Rightarrow P\hat{T}C=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

مثال 1: در شکل زیر، اگر در دایرهٔ $C(o,r)$ زاویهٔ مرکزی 45° باشد، وسعت زوایای محیطی و مماسی را دریابید.

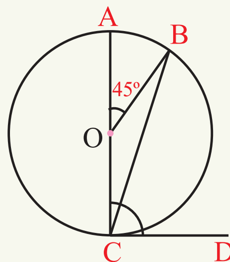
حل: با استفاده از رابطه بین زاویهٔ مرکزی و قوس مقابل آن می‌توانیم بنویسیم که:

$$A\hat{O}B = 45^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$$

$$B\hat{O}C = 135^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 135^\circ$$

$$B\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$



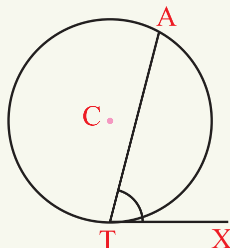
مثال 2: در شکل زیر، اندازهٔ قوس $\overset{\frown}{AT}$ که مقابل $A\hat{T}X$ قرار دارد $(2\alpha-6)^\circ$ است، اندازهٔ زاویهٔ مماسی ATX را دریابید.

حل: با استفاده از رابطهٔ وسعت زاویهٔ مماسی با قوس مقابل می‌توانیم بنویسیم که:

$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

$$= (\alpha - 3)^\circ$$

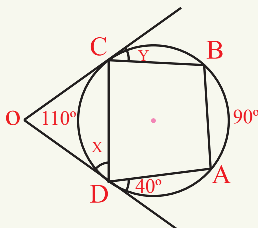


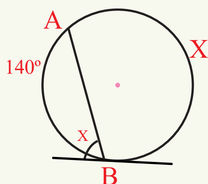
زاویه‌های مماسی و محیطی که در مقابل عین قوس واقع باشند، باهم مساوی اند.

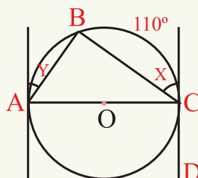
زاویهٔ مماسی نصف قوس مقابل آن است.

تمرین

اندازهٔ زاویه‌های مماسی را در شکل‌های زیر به دست آرید:







نکات مهم فصل اول

- **دایره:** ست تمام نقاط در یک مستوی که از یک نقطهٔ ثابت، فاصلهٔ مساوی داشته باشند، دایره نامیده می‌شود.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، نقاط ساحهٔ داخلی دایره گفته می‌شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، مساوی به شعاع دایره باشد، نقاط بالای دایره گفته می‌شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، نقاط ساحهٔ خارجی دایره گفته می‌شوند.
- قسمتی از مستوی که توسط محیط دایره و سطح داخلی آن جدا شده باشد، سطح دایره نامیده می‌شود.
- **شعاع دایره**: خطی که مرکز دایره را به یکی از نقاط محیط دایره وصل نماید، شعاع دایره نامیده می‌شود.
- **وتر دایره:** قطعه خطی که دو نقطهٔ محیط دایره را با هم وصل نماید، وتر دایره نامیده می‌شود.
- **قطر دایره:** وتری که از مرکز دایره بگذرد، قطر دایره نامیده می‌شود.
  - هر قطر از دو شعاع تشکیل گردیده است.
- **قوس دایره:** یک قسمت از محیط دایره به نام قوس دایره یاد می‌شود.
- **مماس دایره:** مستقیمی که با دایره تنها یک نقطهٔ مشترک داشته به نام مماس دایره یاد می‌شود.
- **قطعه دایره:** قسمتی از سطح دایره که توسط وتر دایره جدا شده باشد، قطعهٔ دایره یاد می‌شود.
- **قطاع دایره:** قسمتی از دایره که توسط دو شعاع و قوس مربوط از سطح دایره جدا شده باشد، قطاع دایره نامیده می‌شود.
- اگر مستقیم با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد، مماس و اگر دو نقطهٔ مشترک داشته باشد، قاطع گفته می‌شود.
- در هر دایره قطعه خط عمود بر وتر، وتر را تنصیف و قوس‌های مساوی را از آن جدا می‌کند.

- شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است.
- وترهای مساوی از مرکز هم فاصله‌اند.
- **زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌یی که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از شعاع دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ مرکزی گفته می‌شود.
- اندازهٔ وسعت هر زاویهٔ مرکزی، مساوی به قوس مقابل است.
- طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $\hat{AOB}$ از رابطهٔ $\frac{\hat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$ به دست می‌آید.
- **زاویهٔ محیطی:** زاویه‌یی که رأس آن در محیط دایره واقع بوده، اضلاع آن از دو وتر دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ محیطی نامیده می‌شود.
- وترهای مساوی یک دایره را زاویه‌های مساوی از مرکز جدا می‌کنند.
- وسعت هر زاویهٔ محیطی مساوی به نصف قوس مقابل که توسط آن قطع شده، می‌باشد.
- هر زاویهٔ محیطی نصف زاویهٔ مرکزی است که به مقابل عین قوس واقع باشد.
- **زاویهٔ مماسی:** زاویه‌یی که یک ضلع آن مماس به دایره و ضلع دیگر آن وتر دایره بوده، رأس آن در نقطهٔ تماس قرار داشته باشد، زاویهٔ مماسی گفته می‌شود.
- وسعت هر زاویهٔ مماسی به اندازهٔ نصف قوس مقابل آن است.
- وسعت زوایای مماسی و محیطی که مقابل عین قوس واقع باشد، با هم مساوی‌اند.
- وسعت هر زاویهٔ مماسی متمادی به نصف زاویهٔ مرکزی است که به مقابل عین قوس واقع باشند.
- **موقعیت دو دایره با همدیگر:**

ـ اگر فاصلهٔ بین مراکز دو دایره، بزرگ‌تر از مجموع طول شعاع‌های دایره‌ها باشد، دایره‌ها را غیرمتقاطع می‌گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره، برابر مجموع طول شعاع‌های دایره‌ها باشد، دایره‌ها را خارجاًمماس می‌گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره، کوچک‌تر از مجموعهٔ طول شعاع‌های دایره‌ها و بزرگ‌تر از قیمت مطلق حاصل تفریق شعاع‌های دایره‌ها باشد، دایره‌ها را متقاطع می‌گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دایره‌ها مساوی به قیمت مطلقهٔ حاصل تفریق شعاع‌های دایره‌ها باشد، دایره‌ها را با هم داخلاً مماس می‌گویند.

ـ اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد، دایره‌ها را متحدالمرکز می‌گویند.

تمرین‌های فصل اول

• در سوال‌های زیر برای هر سوال چهار گزینه داده شده است. گزینه صحیح را انتخاب کنید.

1- طول قطر دایره مساوی است به:

a) 3r b) π c) 2π d) 2r

2- دایره به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

a) O b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(O,r)$

3- خط مستقیم که با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد، به نام:

a)وتر یاد می‌شود. b)مماس یاد می‌شود.

c) قوس یاد می‌شود d) محیط یاد می‌شود.

4- ست نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز دایره بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد:

a) روی دایره گفته می‌شود. b)بالای دایره گفته می‌شود.

c) خارج دایره گفته می‌شود. d)داخل دایره گفته می‌شود.

5- وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد:

a) ضخیم تر است. b) کوچک‌تر است.

c)کوتاه‌تر است. d) طویل تر است.

6- اگر یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع کند آن‌را:

a) مستقیم و دایره گویند. b) مماس گویند.

c) قاطع گویند. d) موازی گویند.

7- اگر زاویهٔ مرکزی یک دایره 80° باشد، اندازهٔ قوس مقابل زاویهٔ مذکور مساوی است به:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- یک خط مستقیم با دایره در مستوی چند حالت دارد؟

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- زاویه‌یی که رأس آن بالای محیط و اضلاع آن وترهای دایره باشد؟

a) زاویهٔ مرکزی است. b) زاویهٔ مماس است.

c) زاویهٔ محیطی است.

• جاهای خالی را با کلمه‌های مناسب پر کنید.

1- قسمتی از سطح دایره که توسط وتر از دایره جدا می‌شود.................................... دایره، نامیده می‌شود.

2- بزرگ‌ترین وتر دایره .... است.

3- ست نقاطی که .... آن‌ها از مرکز دایره کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، ساحهٔ ....دایره گفته می‌شود.

4- وقتی که مستقیم با دایره هیچ .... مشترک نداشته باشد .... دایره گفته می‌شود.

5- در هر دایره قطر .... بر هر وتر، وتر را تنصیف و قوس‌های .... از آن جدا می‌کنند.

6- در هر مثلث قایم‌الزاویه .... وتر مساوی به مجموعهٔ مربع‌های اضلاع .... است.

7- در هر دایره وتری که به مرکز نزدیک‌تر است .... می‌باشد.

8- شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای .... عمود است.

9- زاویهٔ مرکزی زاویه‌یی است که .... آن در مرکز و اضلاع آن .... دایره باشد.

10- زاویه‌یی که یک ضلع آن به دایره .... و ضلع دیگر آن .... دایره و رأس آن بالای نقطهٔ .... واقع باشد زاویهٔ مماسی نامیده می‌شود.

• کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام‌ها غلط‌اند، در مقابل صحیح علامهٔ (ص) و در مقابل غلط علامهٔ (غ) بگذارید.

1- (   ) ست تمام نقاطی یک مستوی که از یک نقطهٔ (O) به نام مرکز به اندازهٔ r فاصلهٔ مساوی داشته باشد، دایره نامیده می‌شود.

2- (   ) معمولاً دایره را به نام محیط آن یاد می‌کنند.

3- (   ) قطعه خطی که دو نقطهٔ محیط دایره را وصل می‌کند. قطر نامیده می‌شود.

4- (   ) شعاع دایره، نصف قطر است.

5- (   ) برای نمایش قطعهٔ دایره از علامهٔ ($\frown$) استفاده می‌شود.

6- (   ) ست نقاطی که فاصلهٔ آن‌ها از مرکز مساوی به شعاع دایره باشد، ساحهٔ

خارج دایره گفته می‌شود.

7- (   ) قطر عمود بر هر وتر، وتر را تنصیف و دو قوس مختلف را از آن جدا می‌کند.

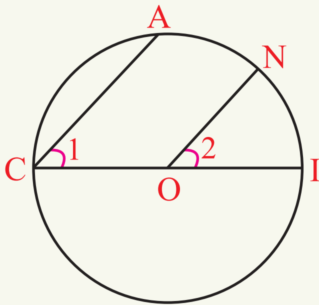
8- (   ) تمام دایره به نام قوس دایره یاد می‌شود.

9- (   ) در رابطهٔ $d=\frac{r}{2}$، d قطر و r شعاع دایره است.

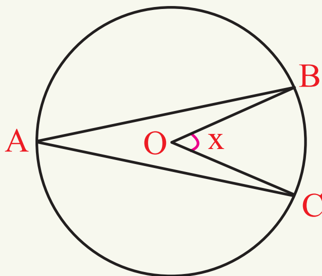
10- (   ) شعاع دایره در نقطهٔ تماس بالای مماس عمود است.

- سؤال های زیر را حل نمایید.

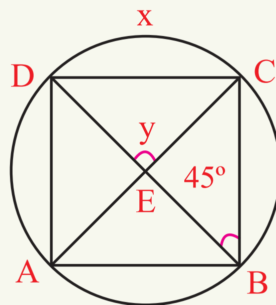
1- در شکل زیر اگر CI قطر و $CA \parallel ON$ باشد ثابت کنید که $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$ است.



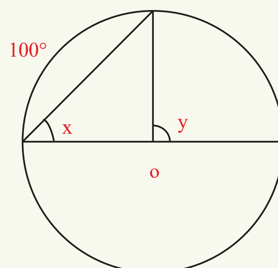
2- در شکل زیر، اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 155^{\circ}$ باشد، $\hat{x}$ را دریابید.



3- در شکل زیر اندازهٔ x و y را دریابید.



4- اندازه‌های x و y را در شکل زیر پیدا کنید.

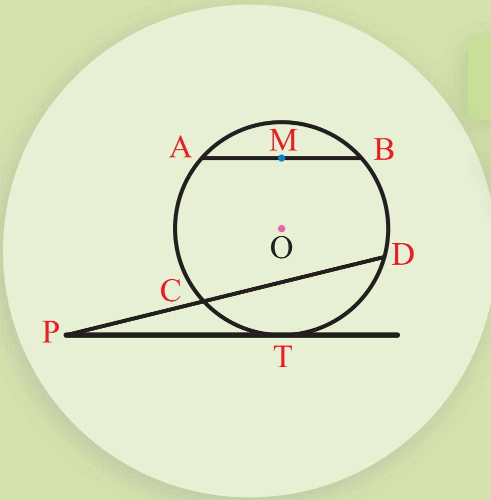


فصل دوم

روابط بین دایره و خطوط مستقیم



رابطه های طولی در دایره



قطعه خط هایی را که در شکل می‌بینید، نام بگیرید.

تعریف

رابطهٔ طولی: روابطی که بین اندازه‌های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است، روابط طولی نامیده می‌شود.

فعالیت

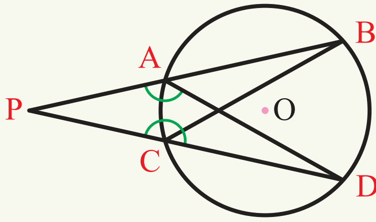
- از نقطهٔ P خارج دایره $C(O,r)$ قاطع PAB و PCD را رسم نمایید.
- نقطهٔ A را به D و B را به C وصل نمایید.
- مثلث PAD و PCB را روی شکل نشان دهید و بگویید که آیا آن‌ها متشابه‌اند؟
- نسبت‌های تشابه را در دو مثلث فوق بنویسید.

- هرگاه در دو مثلث، دو زاویهٔ مثلث با هم مساوی باشند، زاویهٔ سوم آن با هم مساوی می‌شود.
- در مثلث‌های متشابه اضلاع مقابل زاویه‌های مساوی متناسب‌اند.

ازنتیجهٔ این فعالیت، قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه (2-1): هرگاه از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر قاطع در قطعهٔ خارجی آن با هم‌دیگر مساوی است.

ثبوت:



بین مثلث‌های $\overset{\Delta}{PAD}$ و $\overset{\Delta}{PCB}$ روابط زیر موجود است:
$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

$\hat{D} = \hat{B}$ زاویه‌های محیطی عین قوس
$\hat{P} = \hat{P}$ مشترک
$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$

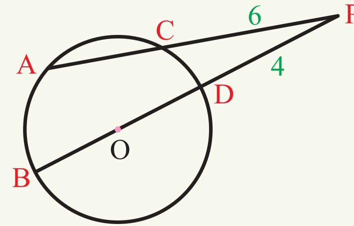
از تساوی سه زاویهٔ فوق می‌توانیم، بنویسیم که مثلث‌های PAD و PCB با هم مشابه‌اند؛ لذا می‌توانیم بنویسیم که:

$$\overset{\Delta}{PCB} \sim \overset{\Delta}{PAD} \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

نتیجه

مثال: در شکل زیر PA و PB دو قاطع دایره $C(O,r)$ است، اگر طول $PA = 10\text{ cm}$, $PC = 6\text{ cm}$ و $PD = 4\text{ cm}$ باشد، طول‌های PB و DB را دریابید.

حل: نظر به طول قطعه های که از نقطهٔ P رسم شده‌اند و با استفاده از قضیهٔ (2-1) می‌توانیم بنویسیم که:



$PA \cdot PC = PB \cdot PD$

$10 \times 6 = PB \cdot 4$

$60 = 4PB$

$PB = 15\text{cm}$

$DB = PB - PD$

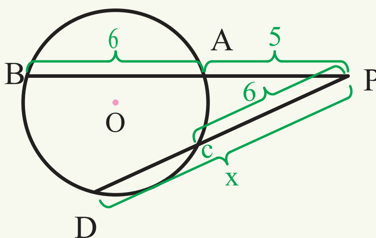
$DB = 15 - 4$

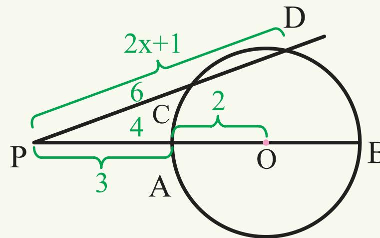
$DB = 11\text{cm}$

اگـر از یک نقطهٔ خارجی، بالای یک دایره دو قاطع رسـم گردد، حاصل ضرب هر قاطع در قطعهٔ خارجی آن با هم‌دیگر مساوی است.

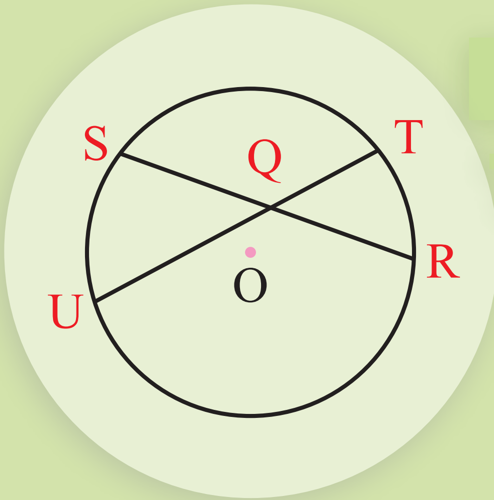
تمرین

1- در اشکال زیر قیمت عددی x را دریافت کنید.



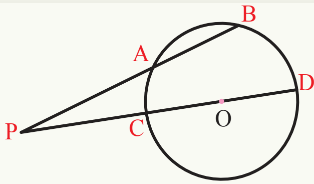


طاقت یک نقطه نظر به یک دایره



به شکل مقابل توجه کنید.
آیا در این شکل تساوی
QR.QS = QU.QT
حقیقت دارد؟

فعالیت

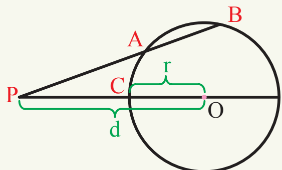


- از نقطهٔ مستقر P که در خارج دایره $C(O,r)$ قرار دارد، قاطع $\overline{PB}$ را رسم‌نمایید.
- ازهمان نقطهٔ P قاطع $\overline{PD}$ را طوری رسم نمایید که از مرکز دایره $C(O,r)$ بگذرد .
- رابطهٔ بین قطعات $\overline{PB}$ و $\overline{PD}$ را با استفاده از قضیهٔ(2-1) بنویسید.
- در رابطهٔ بالا، فاصله‌های PC و PD را بر حسب فواصل الی مرکز دایره بنویسید.
- اگر فاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکز دایره را d و شعاع دایره را r بنامیم، رابطهٔ بالا را بر حسب r و d بنویسید.

از نتیجهٔ این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

قضیهٔ(2-2): از یک نقطهٔ خارج یک مستوی اگر بالای دایره دو قاطع طوری رسم گردد که قاطع دومی نیز از مرکز دایره بگذرد، در این‌صورت حاصل ضرب قطعات قاطع اولی، مساوی به یک مقدار ثابت $d^2 - r^2$ بوده، که در آن، d فاصله نقطهٔ ثابت از مرکز دایره و r شعاع دایره است.

حالت اول: در این جا قضیه را در حالتی که نقطهٔ مستقر خارج دایره واقع باشد، ثبوت می‌نماییم.



ثبوت: اگر نقطهٔ P خارج دایره باشد و فاصلهٔ آن مرکز دایره به d و شعاع دایره را به r نشان دهیم با استفاده از قضیهٔ(2-1) می‌توانیم، بنویسیم که:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(PO-CO)(PO+OD)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

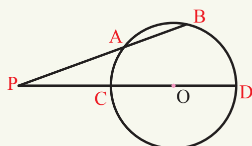
تعریف

رابطهٔ اخیر به نام طاقت یک نقطهٔ P نظر به یک دایره $C(O,r)$ یاد می‌شود، که مقدار d^2-r^2 ثابت می‌باشد که به شکل $P_{(o)}=d^2-r^2$، نیز آن‌را نمایش می‌دهند.

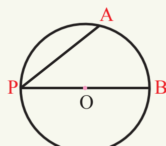
مثال: اگر قطر یک دایره 10cm باشد یک نقطهٔ P به فاصلهٔ 13cm از مرکز دایره قرار دارد، طاقت نقطهٔ P را نظر به دایرهٔ $C(O,r)$ دریابید.

حل: چون قطر دایره داده شده، پس ابتدا شعاع دایره را دریافت می کنیم، بعد طاقت نقطهٔ P را نظر به دایره دریافت می‌نماییم:

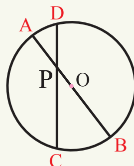
$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5\,cm$$
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$
$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$



• اگـر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشـد، نقطه خارج دایره قرار دارد: $P_{(0)}=d^2-r^2>0 \Rightarrow d^2>r^2$



• اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد، نقطه بالای محیط دایره واقع است، یعنی: $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$



• اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره کوچک‌تر از صفر یا منفی باشد، نقطه به داخل دایره واقع است.

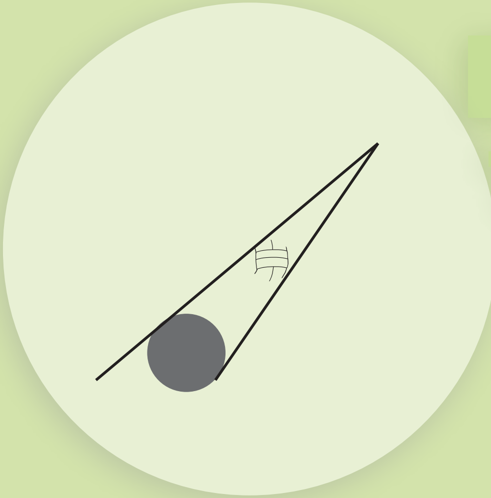
یعنی: $P_{(0)}=d^2-r^2<0 \Rightarrow d^2<r^2$

تمرین

1- طاقت یک نقطه را در حالت‌های زیر پیدا کنید.

الف) اگر $d=7$ و $r=4$ باشد. ب) اگر $d=3$ و $r=3$ باشد. ج) اگر $d=3$ و $r=5$ باشد.

خط مماس به دایره



به شکل مقابل توجه کنید.
هرگاه حرکت اشعهٔ نور را به صورت مستقیم قبول نماییم، این خطوط نسبت به توپ و سایهٔ آن، چه رابطه دارد؟

فعالیت

1- در اشکال زیر قیمت‌های x را دریابید.

- از یک نقطهٔ خارجی P به دایرهٔ $C(O,r)$ دو مماس $\overline{PR}$ و $\overline{PQ}$ را رسم نمایید.
- نقاط Q و R نقاط تماس خط مماس با دایره اند.آیا مماس دیگری از نقطهٔ P به دایره رسم شده می‌تواند؟
- نقطهٔ O را به نقاط Q، R و نقطهٔ P را به O وصل نمایید.
- مثلث‌های تشکیل شده، با هم چه رابطه دارند؟
- آیا طول مماس‌های رسم شده، با هم مساوی اند؟

از نتیجهٔ این فعالیت، قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه(3-2): اگر از یک نقطهٔ خارجی، به یک دایره دو مماس رسم گردد، طول این مماس‌ها با هم مساوی می‌باشند.

ثبوت: از دو مثلث $\overset{\Delta}{POR}$ و $\overset{\Delta}{POQ}$ می‌توانیم بنویسیم که:

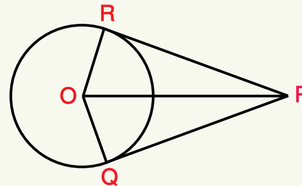
$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... شعاع دایره

$\overline{PO} = \overline{PO}$ مشترک

$\hat{R} = \hat{Q}$..............90°

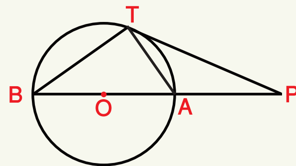
$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$



قضیه(4-2): هرگاه بالای یک دایره از یک نقطهٔ خارج دایره، یعنی P، قاطع $\overline{PB}$ و یک مماس $\overline{PT}$ رسم گردد، ثبوت نمایید که مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

ثبوت: در دایرهٔ $C(O,r)$، PT مماس و $\overline{PB}$ قاطع به دایره است. اگر نقطهٔ T را به A و B وصل نمایید از مثلث‌های $\overset{\Delta}{PTA}$ و $\overset{\Delta}{PTB}$ می‌توانیم بنویسیم که:



$$P\hat{T}A = P\hat{B}T \ldots\ldots(I)$$

زاویه‌های محیطی و مماس مقابل عین قوس

$$\hat{P} = \hat{P} \ldots\ldots\ldots(II)$$

مشترک

از رابطهٔ I و II می‌توانیم بنویسیم:

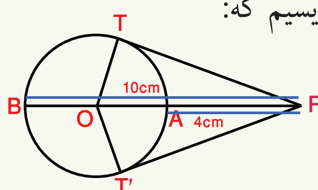
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$$

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB}$$

$$P\hat{T}B = P\hat{A}T \qquad \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \qquad \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

مثال: در شکل زیر قیمت‌هایی چون $PA \cdot PB = d^2 - r^2$ است، بنا بر آن PT و PT' را به‌دست آرید.

حل: می‌دانیم که رابطه بین مماس و یک قاطع عبارت از $PA.PB = PT^2$ است؛ لذا می‌توانیم بنویسیم که:



$$PA = 4cm \qquad PT^2 = PA \cdot PB$$

$$PB = 10cm \qquad PT^2 = 4 \times 10 = 40$$

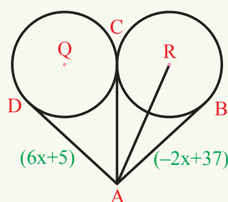
$$PT = ? \qquad PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\,cm$$

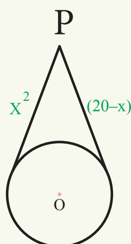
می‌دانیم وقتی که از یک نقطهٔ خارج دایره، به دایره دو مماس رسم شود، طول این مماس‌ها با هم مساوی است: $PT = PT' = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ cm$

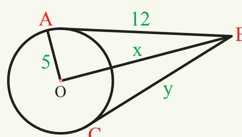
- اگر از یک نقطهٔ خارج به یک دایره دو مماس رسم گردد، طول این مماس‌ها باهم مساوی‌اند.
- هرگاه از یک نقطهٔ خارج بالای یک دایره یک قاطع و یک مماس رسم گردد، مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

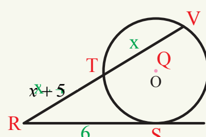
تمرین

در شکل‌های زیر قیمت‌های x را به دست آرید:

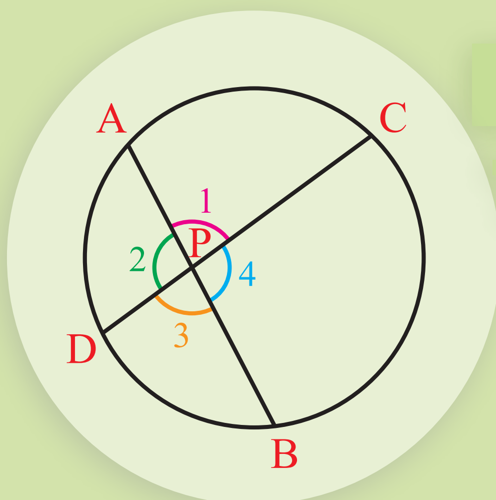








زاویهٔ داخلی دایره



دو وتر متقاطع در داخل دایره رسم کنید و بگویید که چند زاویه تشکیل شده و چه نام دارد؟

تعریف

زاویه‌هایی که از تقاطع دو وتر در داخل دایره تشکیل شده باشد، به نام زاویه‌های داخلی دایره یاد می‌شود؛ مانند زاویه‌های $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ شکل فوق.

فعالیت

- دایرهٔ $C(O,r)$ را رسم کنید و در آن دو وتر AB و CD را طوری رسم نمایید که در نقطهٔ P یک‌دیگر را قطع نمایند. زاویه‌های تشکیل شده چه نام دارند؟
- نقطهٔ D و C را به B وصل نمایید، در مثلث $\overset{\Delta}{PDB}$ زاویهٔ خارجی $C\hat{P}B$ مثلث با دو زاویهٔ غیر مجاور چه رابطه دارد؟

به‌خاطر بیاورید:
- هر زاویهٔ محیطی نصف قوس مقابل آن است.
- وسعت هر زاویهٔ خارجی مثلث مساوی به مجموعهٔ دو زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن است.

از نتیجهٔ این فعالیت، قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

قضیهٔ (2-5): وسعت هر زاویهٔ داخلی دایره، مساوی به نصف مجموعهٔ قوس‌هایی است که توسط اضلاع زاویه از محیط دایره جدا می‌شود.

ثبوت: چون زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ زاویه‌های محیطی است پس می‌توانیم بنویسیم که:

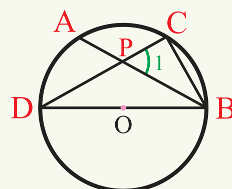
$\hat{B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ وسعت زاویهٔ محیطی

$\hat{D} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ وسعت زاویهٔ محیطی

$C\hat{P}B = \hat{B} + \hat{D}$ زاویهٔ خارجی هر مثلث

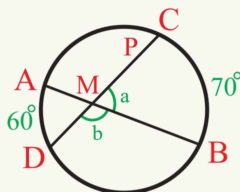
$$\Rightarrow C\hat{P}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$C\hat{P}B = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC})$$



مثال 1: به کمک شکل پایین وسعت زاویه‌های $\hat{a}$ و $\hat{b}$ را دریابید.

حل: وسعت هر زاویهٔ داخلی دایره، مساوی به نصف مجموعهٔ قوس‌های متقابل زاویه و امتداد یافتهٔ اضلاع این زاویه است؛ لذا می‌توانیم بنویسیم:

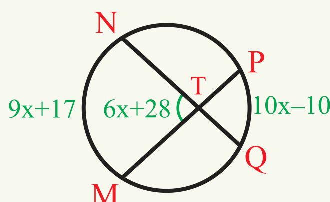


$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60+70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

مثال 2: در شکل زیر قیمت x و اندازهٔ زاویهٔ $N\hat{T}M$ را تعیین کنید.

حل: با استفاده از رابطهٔ وسعت زاویه‌های داخلی یک دایره می‌توانیم بنویسیم که:



$$\overset{\frown}{NM} = 9x+17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x-10$$

$$N\hat{T}M = 6x+28$$

$$6x+28 = \frac{\overset{\frown}{NM} + \overset{\frown}{PQ}}{2}$$

$$6x+28 = \frac{9x+17+10x-10}{2}$$

$$12x+56 = 19x+7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

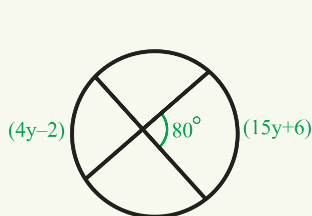
$$N\hat{T}M = 6x+28$$

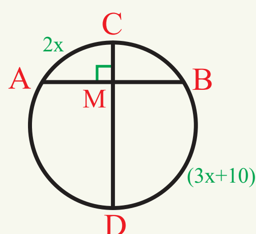
$$= 6\times7+28 = 42+28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

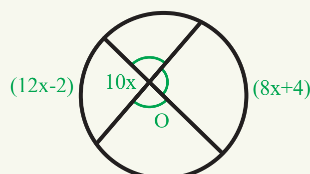
$$N\hat{T}M = 70^\circ$$

تمرین

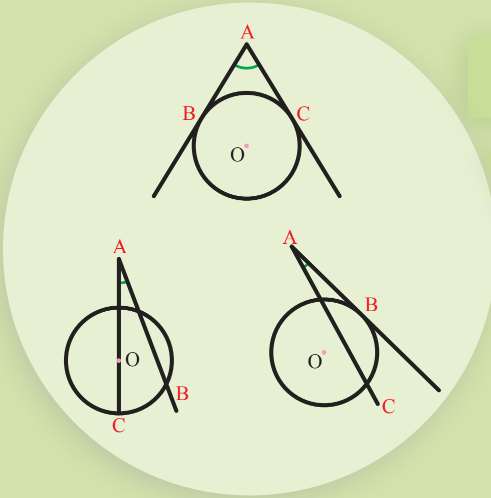
1- در اشکال زیر قیمت‌های x و y را محاسبه کنید.







زاویهٔ خارجی دایره



در اشکال مقابل، قطعه خط‌ها و زاویه‌های مقابل را نام ببرید.

تعریف

زاویه‌یی که از تقاطع دو قاطع، دو مماس و یا یک قاطع ویک مماس، در خارج دایره تشکیل گردیده باشد، به نام زاویهٔ خارجی دایره یاد می‌شود.

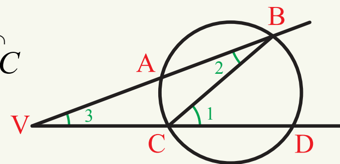
فعالیت

- در دایرهٔ $C(O,r)$ دو وتر غیر موازی AB و CD را امتداد می‌دهیم که زاویهٔ خارجی $B\hat{V}D$ را تشکیل دهد. نقطهٔ C را به B وصل نمایید.
- زاویهٔ خارجی مثلث $\overset{\Delta}{BVC}$، یعنی $(\hat{1})$ با دو زاویهٔ غیر مجاور مثلث چه ارتباط دارد؟

از نتیجهٔ این فعالیت، قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

قضیه (2–6): وسعت زاویهٔ خارجی دایره، مساوی به نصف تفاضل قوس‌هایی است که توسط وترها قطع می‌گردد.

ثبوت: نقطهٔ B را به C وصل می‌کنیم در مثلث VBC داریم که:



وسعت زاویهٔ خارجی مثلث: $\hat{1}=\hat{2}+\hat{3}$

$\hat{3}=\hat{1}-\hat{2}$

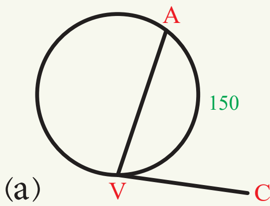
وسعت زاویهٔ محیطی: $\hat{1}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

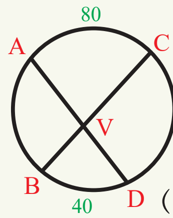
وسعت زاویهٔ محیطی: $\hat{2}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

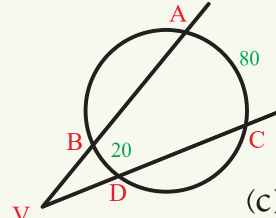
$$\Rightarrow \hat{3}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$B\hat{V}D=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC})$$

مثال 1: در اشکال زیر وسعت زاویه‌های $\hat{AVC}$ را پیدا می‌کنیم.







حل: با استفاده از وسعت زاویه‌های داخلی، خارجی و مماسی دایره می‌توانیم بنویسیم:

$$a)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AV} = \frac{1}{2}\cdot(150)^\circ \quad \hat{AVC}=75^\circ$$

$$b)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80+40)^\circ \quad \hat{AVC}=60^\circ$$

$$c)\ \hat{AVC}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80-20)^\circ \quad \hat{AVC}=30^\circ$$

مثال 2: با استفاده از شکل زیر قیمت x و y را پیدا می‌کنیم.

$$\hat{ANB}=\frac{x+y}{2}\Rightarrow 70=\frac{x+y}{2}\Rightarrow x+y=140.....I$$

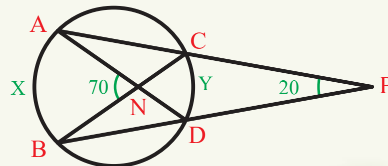
$$\hat{APB}=\frac{x-y}{2}\Rightarrow 20=\frac{x-y}{2}\Rightarrow x-y=40.....II$$

اگر دو رابطهٔ I و II را طرف به طرف باهم جمع کنیم داریم که:

$2x=180^\circ$

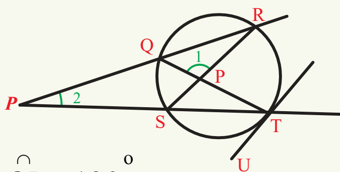
$x=90^\circ$

$y=50^\circ$



تمرین

در شکل‌های زیر کمیت‌های نامعلوم را دریابید.

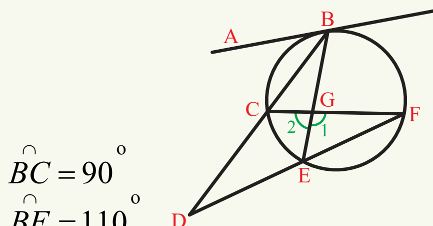


$\overset{\frown}{QR}=120^\circ$

$\overset{\frown}{RT}=90^\circ$

$\overset{\frown}{QS}=50^\circ$

$\hat{STU}=?\quad,\quad \hat{1}=?\quad,\quad \hat{2}=?$



$\overset{\frown}{BC}=90^\circ$

$\overset{\frown}{BF}=110^\circ$

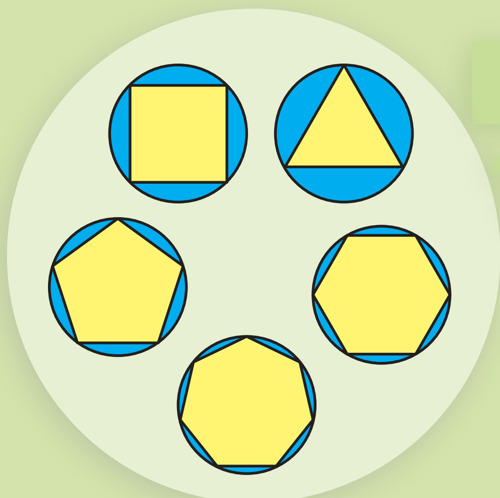
$\overset{\frown}{EF}=110^\circ$

$\hat{1}=?\ ,\ \hat{2}=?\ ,\ \hat{D}=?\ ,\ \hat{ABC}=?$

دایرهٔ محیطی

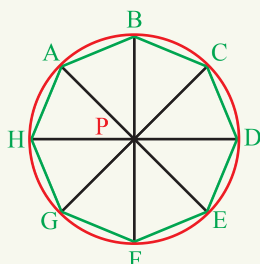
به شکل مقابل توجه کنید.

در این شــکل کدام اشــکال هندسی دیده می‌شوند، نام ببرید.



تعریف

دایره‌یی که از رأس‌هــای یک مضلع بگذرد، به‌نام دایرهٔ محیطــی مضلع یاد می‌گردد و مضلع را مضلع مرســوم به دایره می‌نامند، مانند شکل مقابل.



دایرهٔ محیطی مثلث: دایره‌یی که از رأس‌های یک مثلث بگذرد یا خارجاً به رأس‌های مثلث مماس باشد، دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود

فعالیت

- مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ناصف‌های عمودی اضلاع AB ، AC و BC را ترسیم نمایید.
- ناصف‌هــای عمودی فوق، در چنــد نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کند؟ نقطهٔ تقاطع آن‌ها را O به‌نامید.
- طول‌های OB،OA و OC را با هم مقایسه کنید.
- دایره‌یی به مرکز O و به شعاع OA رسم نمایید. آیا این
- دایرهٔ ترسیم شده نسبت به مثلث چه نامیده می‌شود؟

به یاد داشته باشید:
دایره‌یــی کــه از تمام رأس‌های یک مضلع بگذرد مضلع را مرسوم به دایره گویند.

دایره از نقاط B و C نیز می‌گذرد؟ چرا؟

دایره ترسیم شده نسبت به مثلث چه نامیده می‌شود؟

نتیجهٔ فعالیت بالا را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

نقطهٔ تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع یک مثلث مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث می‌باشد.

مثال: مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC را طوری رسم نمایید که طول اضلاع قایم آن به ترتیب 8cm و 6cm باشد. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را به دست آورید.

حل: می‌دانیم که در هر مثلث قایم‌الزاویه مرکز دایرهٔ محیطی آن بالای وتر مثلث قرار دارد. بنابراین ابتدا طول وتر را دریافت می‌نماییم. که نقطهٔ وسطی آن مرکز دایرهٔ محیطی است.

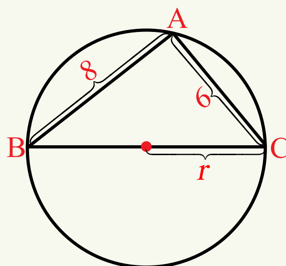
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = 100$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



- دایره‌یی که با رأس‌های یک مضلع، مماس باشد، به نام دایرهٔ محیطی یاد می‌گردد و مضلع را مضلع مرسوم به دایره می‌نامند.

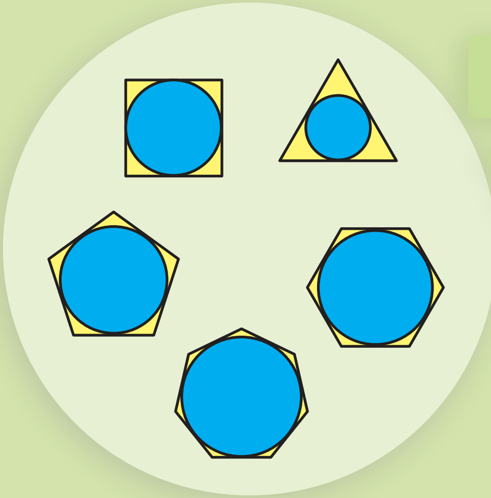
نقطهٔ تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع یک مثلث، مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث می‌باشد.

تمرین

1- مثلثی که اضلاع آن به ترتیب 4,3 و 5 سانتی متر است، رسم نموده، شعاع دایرهٔ محیطی آن‌را محاسبه کنید.

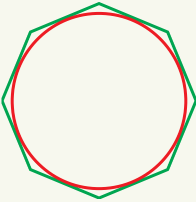
2- مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قایم‌الزاویه متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین در کجا واقع است؟ در رسم نشان دهید.

دایرهٔ محاطی



– شکل‌های هندسی را که در شکل مقابل می‌بینید، نام ببرید.
– چه را بطه‌یی بین شکل ها می‌بینید؟

تعریف



دایره‌یی که محیط آن، به اضلاع مضلع مماس باشد، دایرهٔ محاطی گفته می‌شود؛ مانند شکل مقابل که توسط مضلع احاطه شده است.

دایرهٔ محاطی مثلث: دایره‌یی که محیط آن به هر سه ضلع یک مثلث مماس باشد، به نام دایرهٔ محاطی مثلث یاد می‌گردد.

فعالیت

- مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ناصف‌الزاویه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع را به (O) نشان دهید.
- از نقطهٔ O بالای اضلاع مثلث ABC عمودهای $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ و $\overline{OP}$ را رسم کنید.
- طول عمودهای $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ و $\overline{OP}$ را با هم مقایسه کنید.
- آیا دایره‌یی که به مرکز O و شعاع $\overline{ON}$ رسم شود از نقاط M و P می‌گذرد؟ چرا؟
- دایرهٔ ترسیم شده، چه نامیده می‌شود؟

عمودهای وسطی مثلث در داخل دریک نقطه متقاطع اند.

نتیجهٔ فعالیت بالا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.
– نقطهٔ تقاطع ناصف‌الزوایای داخلی هر مثلث، مرکز دایرهٔ محاطی است.

دایرهٔ محاطی مثلث

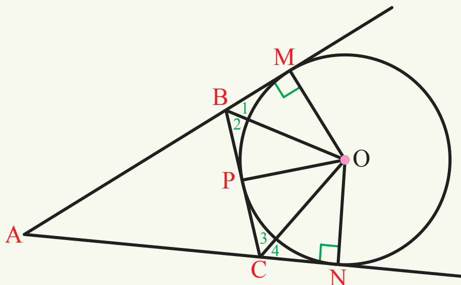
فعالیت

دایرهٔ محاطی مثلث را رسم کنید.

- مثلث ABC را رسم نموده، اضلاع AB و AC را امتداد دهید.
- ناصف‌الزاویهٔ خارجی B و C را رسم نمایید و نقطهٔ تقاطع را O بنامید.
- آیا نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی شده می‌تواند؟ چرا؟
- از نقطهٔ ثابت O بالای یک ضلع و دو ضلع امتداد یافته، مثلث عمودهای $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ و $\overline{OP}$ رسم نموده، نشان دهید که:

فکر کنید و بحث نمایید:
• هر گاه مجموعهٔ زاویه‌های مقابل یک چهار ضلعی 180 درجه باشد این چهار ضلعی مرسوم به دایره است؟
به یاد داشته باشید:
• هر مضلع منظم دایره محیطی و محاطی دارد.

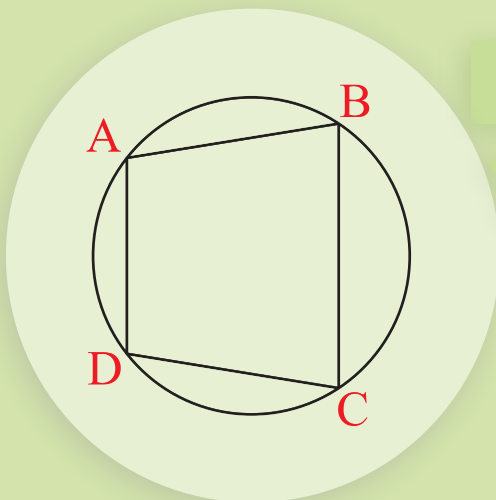
دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافتهٔ مثلث، مماس باشد، دایرهٔ محاطی مثلث گفته می‌شود.



تمرین

1– در کدام نوع مثلث‌ها مرکز دایرهٔ محیطی و محاطی با هم‌دیگر منطبق‌اند، آن را با هم رسم کنید.

خصوصیت چهار ضلعی مرسوم به دایره



در شکل مقابل، بین دایره و رأس‌های چهار ضلعی چه رابطه‌یی وجود دارد؟

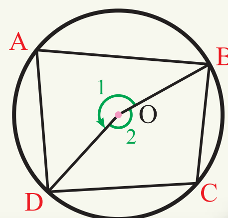
فعالیت

- چهار ضلعی کیفی ABCD مرسوم به دایره را رسم نمایید.
- زاویه‌های تشکیل شده دایرۀ محیطی چه نام دارد؟
- مرکز دایره را به دو رأس مقابل چهار ضلعی وصل کنید. مجموع زاویه‌های مرکزی تشکیل شده، چند درجه است؟
- رابطه بین زاویه‌های مرکزی و محیطی که به مقابل عین قوس واقع باشد، برای زاویه‌های مرکزی فوق بنویسید.

از نتیجۀ این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم:

قضیه: مجموعۀ زاویه‌های مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.

ثبوت:



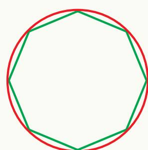
$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

فعالیت



- سه ضلعی منظم چه نام دارد؟ اندازۀ هر زاویۀ آن چند درجه است؟
- چهار ضلعی منظم چه نام دارد؟ اندازۀ هر زاویۀ آن چند درجه است؟

تعریف

مضلعی که اضلاع و زاویه‌های آن با هم مساوی باشد، مضلع منظم نامیده می‌شود.

فعالیت

- یک پنج ضلعی کیفی رسم کنید.
- یک رأس آنرا به رأس‌های غیر مجاور آن وصل کنید؛ چند مثلث تشکیل می‌شود؟
- مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها چند درجه است؟
- از مجموعهٔ زاویه‌های داخلی پنج ضلعی چه نتیجه می گیرید؟
- این فعالیت را برای یک شش ضلعی تکرار کنید.
- اگر یک n ضلعی داشته باشید، مجموع زاویه‌های داخلی آن، چند درجه خواهد بود؟

اگر تعداد اضلاع را به n و مجموع زاویه‌های داخلی مضلع را به S_n نشان دهیم پس مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی $S_n = (n-2)\ (180^\circ)$ درجه است.

مثال: مجموع زاویه‌های داخلی چهار ضلعی و ده (10) ضلعی را به دست آرید؛

حل: مجموع زاویه‌های داخلی هر مضلع از رابطهٔ $S_n = (n-2)\ (180^\circ)$ به دست می‌آید، لذا داریم که:

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10-2)(180)^\circ = 8 \times 180^\circ \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

به یاد داشته باشید

- تعداد قطرهایی که از رأس یک n ضلعی رسم می گردد از رابطهٔ 3- n به دست می‌آید.
- تعداد مثلث‌هایی که در داخل مضلع از یک رأس تشکیل می‌شوند از رابطهٔ 2- n به دست می‌آید.
- مجموع زاویه‌های مقابل یک چهار ضلعی محاطی مرسوم به دایرهٔ 180° است.
- مضلعی که اضلاع و زاویه‌های آن با هم مساوی باشد، مضلع منظم نامیده می‌شود.

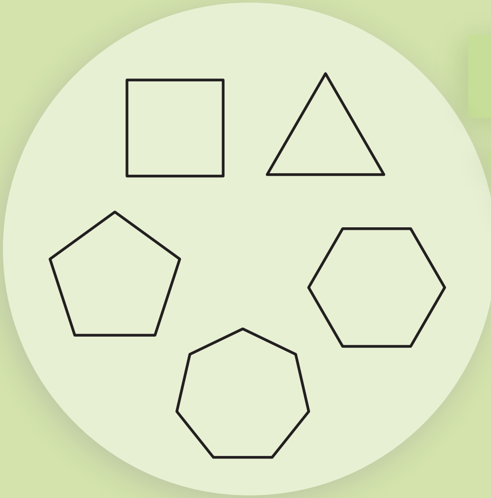
تمرین

1- اندازهٔ زاویه‌های یک شش ضلعی منظم، چند درجه است؟

2- اندازهٔ زاویه‌های یک n ضلعی منظم، چند درجه است؟

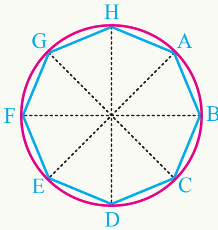
3- مثلث‌هایی که توسط اقطار از یک رأس در یک 10 ضلعی تشکیل می‌شود چند است؟

ترسیم مضلع منظم



- دقت کنید.
- در شکل مقابل چند نوع مضلع را می‌بینید؟
- به نظر شما، این مضلع ها را چگونه رسم کرده اند؟

فعالیت



- دایرهٔ $C(O,r)$ را رسم نموده، در مرکز آن 8 زاویهٔ مجاور مرکزی مساوی را رسم کنید.
- اگر n تعداد اضلاع یک مضلع و θ زاویهٔ مرکزی مقابل اضلاع مضلع باشد، آیا رابطهٔ $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ حقیقت دارد؟
- نقاط تقاطع اضلاع زاویه‌ها با محیط دایره را به هم وصل نمایید.
- آیا اضلاع مضلع تشکیل شده، باهم مساوی است؟ چرا؟
- مضلع تشکیل شده، چه نوع مضلع است؟ هر زاویهٔ مرکزی مقابل اضلاع این مضلع چند درجه است؟

وسعت زاویهٔ مرکزی مقابل هر ضلع یک n ضلعی منظم مساوی‌به $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ است.

فعالیت

- در دایرهٔ $C(O,r)$ یک شش ضلعی منظم محاط شده است.
- مرکز دایره را به رأس‌های شش ضلعی وصل کنید؟چند مثلث تشکیل می‌شود؟
- اندازهٔ هر یک از زاویه‌های مرکزی مقابل اضلاع این شش ضلعی، چند درجه است؟
- مثلث‌های تشکیل شده، چه نوع مثلث ها‌اند؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می توان به صورت زیر بیان کرد:

طول ضلع هر شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایرهٔ محیطی آن است.

مثال: دایره‌یی که شعاع آن $2\ cm$ است، چطور می‌توانیم، آن‌را به یک شش ضلعی منظم محاط نماییم؟

حل: می‌دانیم که اندازهٔ هر ضلع شش ضلعی منظم، مساوی به شعاع محیطی آن است. پس دهانهٔ پرکار را به اندازهٔ شعاع دایره یعنی $2\ cm$ باز نموده، به صورت پیوست روی محیط دایره قوس‌های مساوی جدا می‌نماییم. از وصل نمودن نقاط مشخص شده، یک شش ضلعی منظم به دست می‌آید.

مساحت مضلع منظم از روی شعاع دایرهٔ محاطی

فعالیت

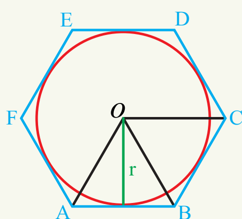
- دایرهٔ محاطی $C(O,r)$ و مضلع منظم $ABCDEF$ را رسم نمایید.
- نقطهٔ O را به رأس A, B و C وصل نمایید. مثلث‌های $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OBC}$ که تشکیل شده اند، انطباق پذیر اند. چرا؟
- ارتفاع ضلع $\overline{AB}$ در مثلث $\overset{\Delta}{AOB}$ با شعاع دایره مساوی است چرا؟
- مساحت مثلث‌های فوق از کدام رابطه به دست می‌آید؟
- آیا مساحت n ضلعی منظم از مساحت n مثلث انطباق‌پذیر تشکیل شده است؟
- محیط مضلع منظم از رابطهٔ $P=\overline{AB}\cdot n$ به دست آمده است. چرا؟

هرگاه مساحت مضلع منظم را به A، محیط آن‌را به P و شعاع دایرهٔ محاطی یک n ضلعی را به r نشان دهیم، مساحت مضلع عبارت از $A=\frac{1}{2}P\cdot r$ است. برای ثبوت به صورت زیر عمل می‌نماییم.

$$A=\frac{1}{2}AB\cdot r\cdot n$$

محیط مضلع $P=AB\cdot n$

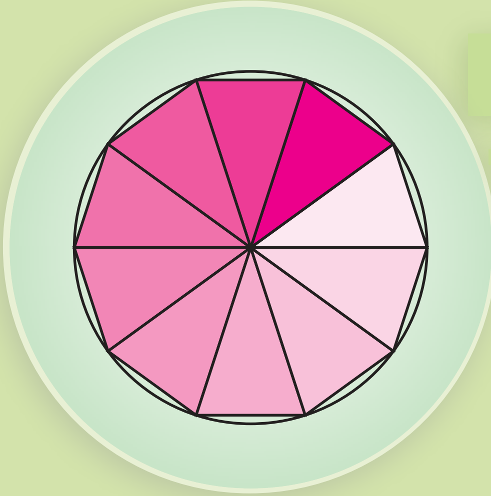
در نتیجه $A=\frac{1}{2}P\cdot r$



تمرین

1- در دایره‌یی به شعاع $3cm$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم نمایید که محاط به دایره باشد.

محیط و مساحت دایره



در شکل داده شده، روابط بین مجموع مساحت مثلث‌ها با دایره و مجموع طول یک‌تعداد اضلاع مثلث‌ها را با طول محیط دایره مقایسه کنید.

در دایرهٔ $C(O,r)$ اگر قطر به حرف d و محیط دایره به حرف c نمایش داده شود، بین این دو عنصر دایره ارتباط زیر موجود است.

$$\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}} = \frac{c}{d} = \pi = \text{Constant}$$

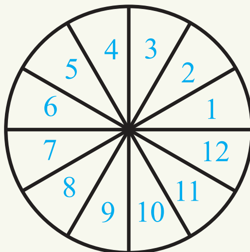
$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \; \ldots\ldots \; (I) \qquad [\pi \approx 3.14159\ldots]$$

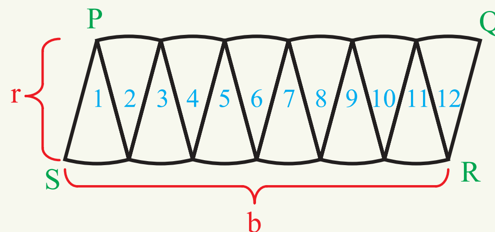
می‌دانیم که $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$، اگر این قیمت را در رابطه (I) وضع نماییم، محیط دایره از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

برای محاسبهٔ مساحت دایره به ریاضیات بالاتری ضرورت داریم. بدین منظور در این جا از روش مشاهده برای محاسبهٔ مساحت دایره استفاده می کنیم. بنابراین جهت روشن شدن موضوع، دایره‌یی را توسط اقطار به 12 حصهٔ مساوی تقسیم می‌نماییم و هر قسمت را از 1 الی 12 شماره زده، قطع می‌نماییم و آن‌ها را پهلو به پهلو مطابق شکل زیر ترتیب می‌نماییم، به وضاحت دیده می‌شود که یک شکل مشابه متوازی‌الاضلاع





تشکیل می‌شود.

می‌دانیم که قاعدهٔ b نصف محیط دایره است. چرا؟ یعنی: $\frac{1}{2}C=$ محیط دایره $\times\frac{1}{2}=$ قاعده

می‌دانیم که مساحت متوازی‌الاضلاع از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

مساحت متوازی‌الاضلاع $= b\cdot r = \frac{1}{2}c\cdot r$

از طرف دیگر چون (محیط دایره $= C = 2\pi r$) می‌باشد، پس داریم که:

مساحت متوازی‌الاضلاع $= A = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2$

از طرف دیگر می‌دانیم که مساحت متوازی‌الاضلاع و دایره تقریباً با هم مساوی اند؛ بنابراین می توانیم بنویسیم که: $A = \pi r^2$ مساحت دایره

در نتیجه گفته می‌توانیم که مساحت دایره از رابطهٔ $A = \pi r^2$ و محیط آن از رابطهٔ $C = 2\pi r$ به دست می آید.

مثال 1: شعاع یک دایره 14 cm است، مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: می‌دانیم که مساحت دایره $A = \pi r^2$ می‌باشد؛ بنابراین داریم که:

$$A = \pi r^2$$

$$\pi = (3.14159)$$

$$A = (3.14159).196cm^2 \Rightarrow A = 615.75cm^2$$

مثال 2: قطر یک دایره 70 cm است، مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطهٔ مساحت دایره داریم که:

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$$

مثال 3: اگر محیط یک دایره 14π cm باشد، شعاع و مساحت دایره را دریابید.

حل: چون محیط دایره داده شده، جهت یافتن مساحت دایره اول باید شعاع دایره را محاسبه نماییم.

$$C = 14\pi cm$$

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A \cong 153.93\ cm^2$$

- مساحت یک دایره به شعاع r را می‌توانیم از رابطهٔ $A = \pi r^2$ به‌دست آوریم.
- محیط یک دایره به شعاع r را می‌توانیم از رابطهٔ $C = 2\pi r$ به‌دست آوریم.

تمرین

1- اگر محیط دایره 41 cm باشد، شعاع دایره را به‌دست آرید.

2- محیط دایره‌یی را به‌دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.

3- مساحت دایره را به‌دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.

روابط طولی در دایره

- روابطی که بین اندازه‌های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است، روابط طولی نامیده می‌شود.
- اگر از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر قاطع در قطعهٔ خارجی آن، با هم‌دیگر مساوی است. $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$
- از یک نقطهٔ ثابت خارج از دایره اگر بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد که قاطع دومی از مرکز دایره بگذرد، حاصل ضرب قاطع اولی در قطعهٔ خارجی آن مساوی به مقدار ثابت $d^2 - r^2$ است.
- اگر از یک نقطهٔ خارجی بالای یک دایره دو مماس رسم گردد، طول این مماس‌ها باهم مساوی است.
- اگر $d^2 - r^2 > 0$ باشد نقطهٔ خارج دایره، اگر $d^2 - r^2 = 0$ باشد، نقطه بالای محیط دایره و اگر $d^2 - r^2 < 0$ باشد، نقطه داخل دایره واقع است.

زاویهٔ داخلی دایره

- هر زاویه‌یی که از تقاطع دو قاطع در داخل دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ داخلی دایره نامیده می‌شود.
- وسعت هر زاویهٔ داخلی دایرهٔ مساوی به نصف حاصل جمع قوس‌های مقابل آن زاویه و امتداد یافتهٔ اضلاع این زاویه است، اگر یک α یک زاویه داخلی باشد؛ پس $\alpha = \frac{\widehat{a} + \widehat{b}}{2}$.

زاویهٔ خارجی

- زاویه‌یی که از اثر تقاطع دو مماس، دو قاطع و یک مماس و یک قاطع در خارج دایره تشکیل شده باشد، زاویهٔ خارجی دایره نامیده می‌شود.

- وســعت هر زاویهٔ خارجی مســاوی به نصف تفاضل قوس‌های مقابل آن است، اگر یک α یک زاویه خارجی باشد؛ پس:

$$\alpha = \frac{\widehat{a} - \widehat{b}}{2}$$

مضلع

- شــکلی که از تقاطع چند قطعه خط تشــکیل شده باشد و هیچ یک از دو قطعه خط به امتداد یک خط مســتقیم نباشد و هر رأس آن فقط و فقط نقطهٔ تقاطع دو قطعه خط باشد، مضلع نامیده می‌شود.
- مضلعی که اضلاع و زاویه‌های آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می‌شود.

دایرهٔ محیطی مضلع: دایره‌یی که به رأس‌های مضلع مماس باشد دایرهٔ محیطی نامیده می‌شود.

دایرهٔ محاطی مضلع: دایره‌یی که به اضلاع مضلع مماس باشد دایرهٔ محاطی مضلع گفته می‌شود.

دایرهٔ محاطی مثلث: دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافته مثلث مماس باشد، دایرهٔ محاطی مثلث نامیده می‌شود.

- خط مرکز بین دو دایره متقاطع وتر مشترک را تنصیف می‌کند و بالای آن عمود است.
- مجموعهٔ زاویه‌های مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.
- محیط دایره از رابطهٔ $C = 2\pi r$ به دست می‌آید.
- مساحت دایره از رابطهٔ $A = \pi r^2$ به دست می‌آید.

تمرینات فصل دوم

- در سؤال‌های زیر برای هر سوال چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح حلقه کنید.

1- اگر یک نقطهٔ p به روی محیط دایره واقع باشد، طاقت نقطهٔ مذکور نظر به دایره عبارت است از:

a) 1 　　　 b) 2

c) 0 　　　 d) هر سه جواب درست است.

2- اگر یک نقطهٔ P به داخل یک دایره واقع باشد، طاقت آن عبارت است از:

a) طاقت نقطهٔ P مثبت است. 　　　 b) طاقت نقطهٔ P منفی است.

c) طاقت نقطهٔ P صفر است. 　　　 d) هر سه جواب غلط است.

3- اگر نقطهٔ P خارج یک دایره واقع شود، طاقت نقطهٔ مذکور نظر به دایره در صورتی که شعاع دایره R و فاصلهٔ نقطهٔ مذکور از دایرهٔ d باشد، عبارت است از:

a) $d-r$ 　　　 b) $d^2-R^2>0$

c) $r-d$ 　　　 d) R^2-d^2

4- اگر شعاع یک دایره R و فاصلهٔ یک نقطهٔ داخلی دایره از مرکز دایره d باشد، طاقت نقطهٔ مذکور نظر به دایره عبارت است از:

a) $R^2=d^2$ 　　　 b) $d^2=R^2$

c) هر دو جواب درست است. 　　　 d) هر سه جواب غلط است.

5- یک نقطه به اندازهٔ 13cm از مرکز دایره $C(O,r)$ فاصله دارد، اگر قطر دایره 10 cm باشد، طول قسمت خارجی قاطع از نقطهٔ مذکور عبارت است از:

a) 13 cm 　　　 b) 10 cm

c) 12 cm 　　　 d) 8 cm

6- اگر طول مماس از نقطهٔ P به دایره (O,r) مساوی به 12cm و قطر دایره 10 cm باشد فاصلهٔ P از O عبارت است از:

a) 13 cm 　　　 b) 12 cm

c) 10 cm 　　　 d) 5 cm

7- اگر وتر $\overline{AB}$ دایرهٔ $C(O,r)$ را تا نقطهٔ P امتداد دهیم طوری که $\overline{AP}=8cm$ و $\overline{BP}=2cm$ باشد طول مماس $\overline{PT}$ عبارت است از:

a) 4 cm 　　　 b) 8 cm

c) 2 cm 　　　 d) هر سه جواب غلط است.

● در سؤال‌های زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب خانه پری نمایید.

1- d^2-r^2 عبارت از .... نقطه نظر به یک دایره است.

2- اگر خط $\overline{PT}$ به دایرۀ $C(O,r)$ مماس باشد، طاقت نقطۀ P نظر به دایرۀ $C(O,r)$ عبارت از......................= $\overline{PT}^2$ است.

3- طاقت یک نقطۀ P نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطه بالای محیط دایره واقع باشد.

4- طاقت یک نقطه نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطۀ داخل دایره واقع باشد.

5- طاقت یک نقطه نظر به یک دایره .... است، در صورتی که نقطه خارج دایره واقع باشد.

6- اگر $\overline{PA}.\overline{PC}=\overline{PB}.\ \overline{PD}$ باشد نقاط C,B,A و D بالای محیط .... واقع بوده و نقطۀ P خارج و یا داخل .... واقع است.

7- اگر B,A و T بالای محیط دایره واقع باشند B,A و P روی یک مستقیم واقع اند در این صورت ....= $\overline{PT}^2$ است در صورتی که P خارج دایره واقع است.

● در مقابل جمله‌های صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله‌های غلط حرف (غ) را بنویسید.

1- (   ) طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مساوی به مربع فاصلۀ نقطه از مرکز دایره است.

2- (   ) اگر یک نقطه روی محیط یک دایره واقع باشد، طاقت آن نظر به دایره صفر است.

3- (   ) اگر یک نقطه داخل یک دایره واقع باشد، طاقت نقطه نظر به دایرۀ مذکور منفی است.

4- (   ) اگر یک نقطه خارج یک دایره واقع باشد، طاقت نقطۀ مذکور نظر به دایرۀ متذکره مثبت است.

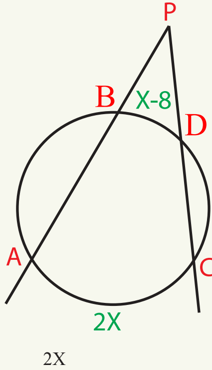
5- (   ) طاقت یک نقطه نظر به هر دایره مثبت است.

6- (   ) طاقت یک نقطه نظر به یک دایره d^2-r^2 است. در صورتی که d فاصلۀ نقطه از مرکز دایره و r شعاع دایره باشد.

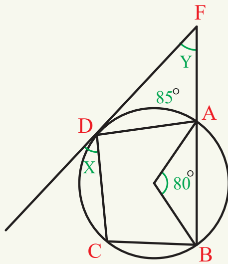
7- (   ) اگر دو دایره مماس باشند، طاقت آن‌ها نظر به هر نقطۀ مماس مشترک با هم مساوی است.

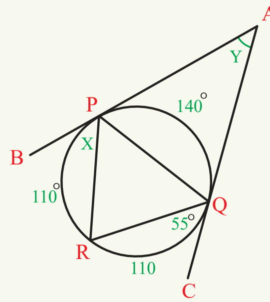
● سؤال‌های زیر را حل نمایید.

1- در شـــکل زیر اگر $\hat{p} = 40^{\circ}$ و قوس‌های مقابل آن به ترتیب $(x-8)^{\circ}$ و $(2x)^{\circ}$ باشد اندازه طول قوس های $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{AC}$ را دریابید.

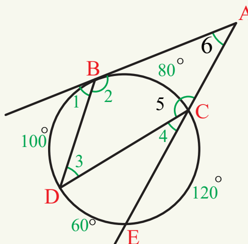


2- اندازه‌های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را در هر شکل پیدا کنید.

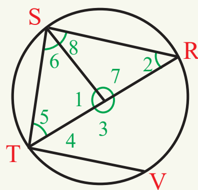




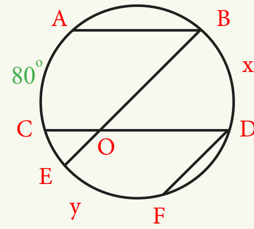
3- در شکل زیر $\overline{AB}$ بر دایرهٔ مماس است. اگر $\overset{\frown}{DB} = 100^{\circ}$, $\overset{\frown}{DE} = 60^{\circ}$ و $\overset{\frown}{CE} = 120^{\circ}$ باشد اندازهٔ زاویه‌های $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$ را دریابید.

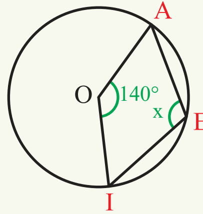


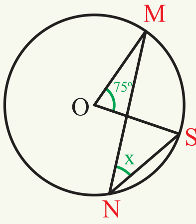
4- در دایرهٔ مرکزی $C(O,r)$، $\overline{RS} // \overline{TV}$, $R\hat{T}S = 50^{\circ}$ و $\overline{RT}$ قطر دایره است زاویه‌های $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$ را دریابید.



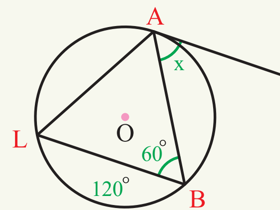
5- اندازهٔ $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

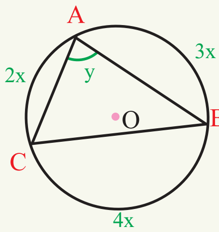


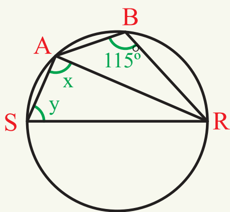




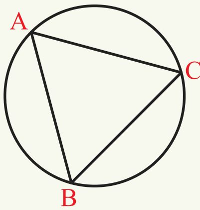
6- اندازهٔ زاویه‌های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را در اشکال زیر دریابید.



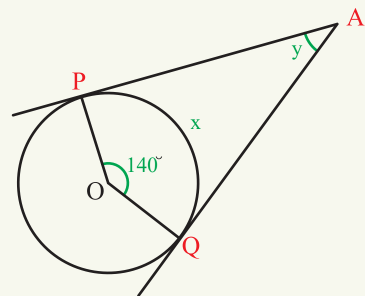


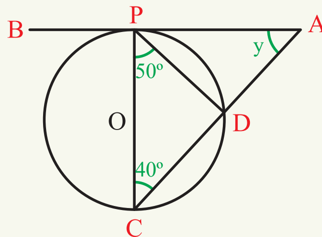


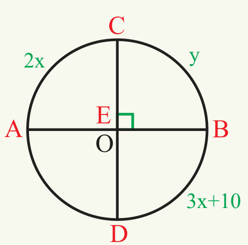
7- با استفاده از تعریف دایرهٔ محاطی نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

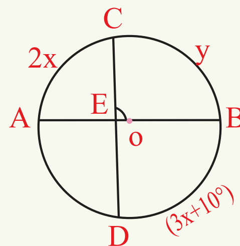


8- در اشکال زیر اندازه‌های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را دریابید.









فصل سوم

هندسهٔ تحلیلی

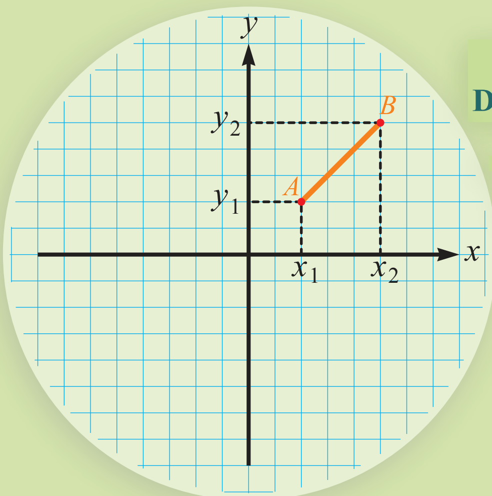
هندسهٔ تحلیلی
Analytic Geometry

هندسهٔ تحلیلی عبارت از علم رابطه بین الجبر و هندسه است که روابط بین معادله های الجبری و اشــکال هندســی را مورد بحث قرار می‌دهد. ریاضی‌دان فرانسوی دکارت برای اولین بار، رابطه بین اشــکال معین هندسی و معادله های الجبری را به دست آورد و اظهار داشت که: بعضی از معادله های الجبری یک شکل معین هندسی دارد. از این که اساس علم هندسه را نقطه و اساس معادله های الجبری را عدد تشکیل می‌دهد بدین منظور لازم است که ابتدا رابطه بین نقطه و عدد را مورد مطالعه قرار دهیم.

دکارت برای رابطه بین عدد و نقطه یک سیستم یا دستگاه قایم محورها را معرفی نمود که تا اکنون به نام وی یاد می گردد.



فاصله بین دو نقطه
Distance between two Points



هر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ در مستوی مختصات قایم یک قطعه خط مانند AB را تعیین می کند. به نظر شما چگونه می توان فاصله بین دو نقطهٔ A و B را محاسبه کرد؟

فعالیت

- نقاط $A(3,5)$ و $B(5,4)$ را در سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.
- قطعه خط $\overline{AB}$ را رسم کنید.
- فاصله بین نقاط A و B را محاسبه نمایید.

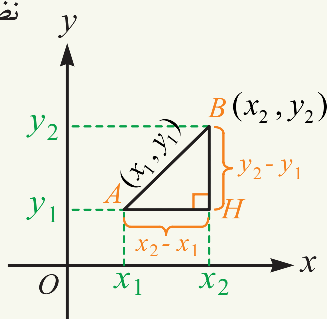
از فعالیت فوق می‌توانیم به صورت کلی فاصله بین دو نقطهٔ کیفی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را طور زیر به‌دست آریم:

در شکل زیر مثلث AHB یک مثلث قایم‌الزاویه است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می توانیم، فاصله بین دو نقطهٔ A و B را طور زیر دریافت نماییم.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \quad \text{........} \quad \text{نظر به قضیهٔ فیثاغورث}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AH} = x_2 - x_1 \\ \overline{BH} = y_2 - y_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مثال 1: فاصله بین نقاط $A(1,7)$ و $B(5,4)$ را دریابید.

حل: با استفاده از فورمول فاصله بین دو نقطه داریم که:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \ unit$$

مثال 2: فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,4)$ را از مبدأ کمیات وضعیه محاسبه نمایید.

حل: چون مختصات مبدأ $O(0,0)$ بوده بنابراین فورمول فاصله بین دو نقطه شکل زیر $\overline{OA} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$ Unit را به خود اختیار می کند.

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5$$

فاصله بین دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ عبارت است از:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله بین این دو نقطهٔ اختیاری را می‌توان به d نیز نمایش داد؛ طور زیر:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصلهٔ هر نقطهٔ $P(x, y)$ از مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از: $\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$

تمرین

1- فاصله بین نقاط $A(0,3)$ و $B(2,0)$ را دریابید.

2- نقاط $A(4,6)$، $B(-2,4)$ و $C(-8,2)$ رأس‌های یک مثلث‌اند، نوعیت مثلث را مشخص سازید.

3- قیمت عددی k را طوری تعیین نمایید که طول قطعه خطی که از نقاط $A(2,3)$ و $B(5k,6)$ می گذرد 5 چند k شود.

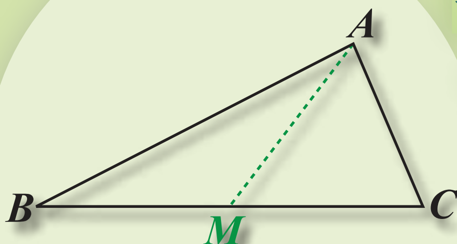
4- فاصله بین نقاط $P(1,\sqrt{3})$ و $Q(-1,1+\sqrt{3})$ را دریابید.

5- اگر $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ و $C(1\ ,9)$ رأس‌های یک مثلث باشد، محیط مثلث را محاسبه نمایید.

6- مساحت مثلثی را به‌دست آرید که رأس‌های آن از نقاط زیر $A(2,0), B(6,2)$ و $C(1,2)$ بگذرد.

7- اگر $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ و $C(6,-5)$ رأس‌های یک مثلث باشد نوعیت مثلث را مشخص سازید.

مختصات نقطهٔ وسطی یک قطعه خط



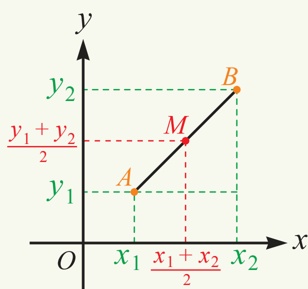
در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قطعه خط $\overline{AM}$ میانه است، مشخصات میانه را بیان کنید.

فعالیت

- نقاط $D(2,0)$ و $E(6,0)$ را روی کمیات وضعیه تعیین کنید.
- اگر نقطهٔ C وسط قطعه خط $\overline{DE}$ باشد، مختصات آن را بنویسید.
- مختصات نقطهٔ C چه رابطه‌یی با مختصات D و E دارد؟
- نقاط $P(0,1)$ و $Q(0,4)$ را روی کمیات وضعیه تعیین نمایید.
- اگر نقطهٔ R وسط قطعه خط $\overline{PQ}$ باشد، مختصات آن‌را به‌دست آرید.
- مختصات نقطهٔ R چه رابطه‌یی با مختصات P و Q دارد؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می‌توان به حالت کلی طور زیر بیان کرد.

اگر دو نقطهٔ $A(x_1,0)$ و $B(x_2,0)$ بالای محور x قرار داشته باشد، مختصات نقطهٔ M وسط $\overline{AB}$ از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ به دست می‌آید.



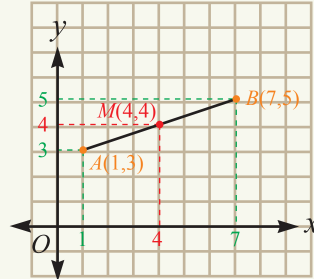
اگر دو نقطهٔ $P(0,y_1)$ و $Q(0,y_2)$ بالای محور y قرارداشته باشد مختصات نقطهٔ M وسط $\overline{PQ}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

به صورت عموم اگر $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ دو نقطه درکمیات وضعیه و M نقطهٔ وسطی قطعه خط $\overline{AB}$ باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ M طور ذیل به دست می‌آید.

$$M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$$

مثال 1: اگر $A(1,3)$ و $B(7,5)$ مختصات انجام قطعه خط $\overline{AB}$ باشد، مختصات نقطهٔ وسطی $\overline{AB}$ را به دست آورید.

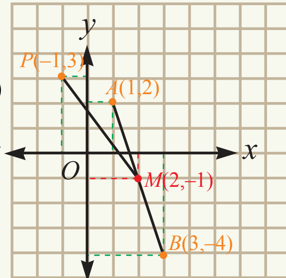
حل: با استفاده از مختصات نقطهٔ وسطی یک قطعه خط می توانیم بنویسیم که:



$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{1+7}{2}\ ,\ \frac{3+5}{2}\right)$$
$$M(4,4)$$

مثال 2: فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,3)$ را از نقطهٔ وسطی مستقیمی که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,-4)$ می گذرد به دست آرید.

حل: برای دریافت فاصلهٔ بین نقطهٔ P و قطعه خط $\overline{AB}$ ابتدا نقطهٔ تنصیف قطعه خط $\overline{AB}$ را پیدا می‌نماییم، بنابراین داریم که:



$$M_{\overline{AB}}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2-4}{2}\right)=(2,-1)\Rightarrow M_{\overline{AB}}=(2,-1)$$
$$\overline{PM}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$
$$\overline{PM}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$$
$$\overline{PM}=5\ \text{unit}$$

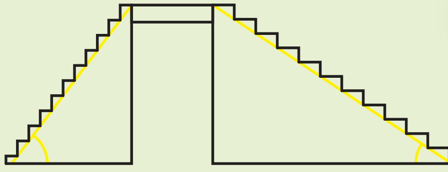
تمرین

1- سه رأس مثلث $A(5,-2)$، $B(3,-1)$ ، $C(1,5)$ داده شده، طول میانهٔ $\overline{AM}$ را دریابید.

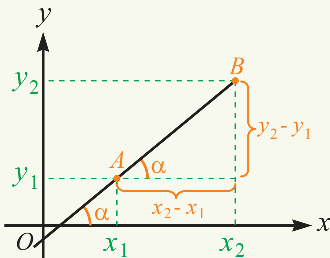
2- اگر نقاط $A(2,4)$، $B(5,9)$، $C(14,9)$ و $D(11,4)$ رأس‌های متوازی‌الاضلاع باشد، مختصات نقاط تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع را دریابید.

3- اگر $A(-1,4)$، $B(-3,-7)$ □ $C(1,9)$ رأس‌های یک مثلث باشند طول میانه را که بالای ضلع $\overline{BC}$ رسم می گردد دریابید.

میل خط مستقیم



به شکل نگاه کنید، بالای کدام یکی از زینه‌ها به راحتی بالا شده می‌توانید؟ چرا؟ علت آن‌را بیان نمایید.



اگـر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطـهٔ کیفی خط مستقیم $\overline{AB}$ باشـد، نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ را میل مستقیم $\overline{AB}$ گویند و طور زیر می‌نویسند:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1: میل خط مستقیمی را دریافت کنید که از نقاط $A(3,5)$ ، $B(4,6)$ بگذرد.

حل: می‌دانیم که میل یک خط مستقیم از رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می‌آید، لذا داریم که:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{4-3} = 1$$

مثال 2: مستقیمی که از نقاط $A(2,5)$ و $B(4,K)$ می‌گذرد، در آن قیمت k را طوری تعیین نمایید که میل خط مستقیم AB مساوی به 3 باشد.

حل: جهت محاسبهٔ قیمت K از رابطهٔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ طور زیر استفاده می‌کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k-5}{4-2}$$

$$3 = \frac{K-5}{2}$$

$$K - 5 = 6$$

$$K = 11$$

مثال 3: میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطهٔ $P(2,3)$ و مبدأ کمیت‌های وضعیه بگذرد.

حل: چون مستقیم از مبدأ کمیات وضعیه می‌گذرد و مختصات مبدأ $O(0,0)$ است میل آنرا طور زیر به دست می‌آوریم:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

1- نقاط $A(2,3)$ و $B(4,6)$ را در کمیات وضعیه نشان دهید.

- مستقیمی که از نقاط A و B می‌گذرد رسم کنید و آنرا Δ_1 نام‌گذاری کنید.
- میل مستقیم Δ_1 را به دست آرید.
- مستقیم Δ_1 چه نوع زاویه‌یی با جهت مثبت محور x می‌سازد.

2- نقاط $M(1,5)$ و $N(4,2)$ را در همان کمیات وضعیه با رنگ دیگری تعیین کنید.

- مستقیمی که از نقاط M و N می‌گذرد رسم کنید و آن را Δ_2 نام گذاری کنید.
- میل مستقیم Δ_2 را به دست آرید.
- مستقیم Δ_2 چه نوع زاویه با جهت مثبت محور x می‌سازد؟
- چه رابطه بین میل خطوط و زوایای تشکیل شده وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را بیان کرده می‌توانیم:

میل هر خط مستقیم مربوط به زاویه‌یی است که مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد.
اگر یک مستقیم با جهت مثبت محور x زاویهٔ حاده بسازد، میل آن عدد مثبت است.
اگر یک مستقیم با جهت مثبت محور x زاویهٔ منفرجه بسازد میل آن عدد منفی است.

تمرین

1- میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقاط $A(1,1)$ و $B(-1,-1)$ بگذرد.

2- در مستقیمی که از نقاط $A(-2,2\sqrt{3})$ و $B(1,a)$ می‌گذرد قیمت a را طوری تعیین نمایید که میل مستقیم $\sqrt{3}$ باشد.

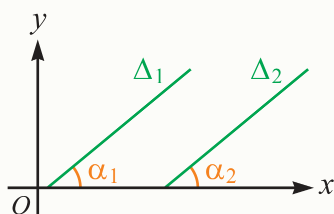
3- هر گاه $A(5,-2)$، $B(3,-1)$ و $C(1,5)$ رأس‌های یک مثلث باشند، میل میانهٔ ضلع $\overline{BC}$ را دریابید.

میل مستقیم‌های موازی



در شکل داده شده، زینه را در نظر گرفته، بگویید که چه رابطه بین دو بازوی زینه موجود است.

فعالیت



- در کمیات وضعیهٔ مختصات قایم، دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را با هم موازی طوری رسم کنید که با جهت مثبت محور x زوایای حاده را بسازند.
- میل خطوط Δ_1 و Δ_2 را محاسبه کرده، با هم مقایسه کنید، ببینید آن‌ها با هم چه رابطه دارند؟
- اگر Δ_1 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_1 و Δ_2 با جهت مثبت محور x زاویهٔ α_2 را بسازد، آن‌گاه α_1 و α_2 با یک‌دیگر چه رابطه دارند؟

در حالت کلی نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

مستقیم‌های موازی دارای میل‌های مساوی می‌باشند.

اگر دو خط مستقیم میل‌های مساوی داشته باشند، در نتیجه زوایایی که با جهت مثبت محور x می‌سازند، نیز با هم مساوی‌اند.

مثال: اگر مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2,5)$ و $B(-6,-11)$ و مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4,-6)$ و $D(3,8)$ بگذرد خطوط Δ_1 و Δ_2 نسبت به هم چه رابطه دارند؟

حل: میل‌های مستقیم‌های Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ m_{\Delta_1}=\dfrac{-11-(5)}{-6-2}=\dfrac{-16}{-8}=2\Rightarrow m_{\Delta_1}=2 \\ m_{\Delta_2}=\dfrac{8+6}{3+4}=\dfrac{14}{7}=2\Rightarrow m_{\Delta_2}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow m_{\Delta_1}=m_{\Delta_2}\Rightarrow \Delta_1\parallel\Delta_2$$

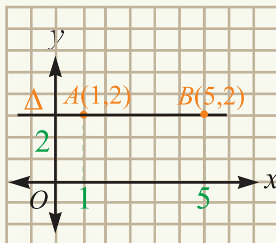
چون میل‌های Δ_2 و Δ_1 باهم مساوی است بنابر آن این خطوط با هم موازی‌اند.

فعالیت

- نقاط $A(1,2)$ و $B(5,2)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی که از نقاط A و B می‌گذرد ترسیم کرده آن را Δ نام‌گذاری کنید.
- مستقیم Δ با جهت مثبت محور x چه نوع زاویه را می‌سازد؟
- میل مستقیم Δ را محاسبه کنید.

در حالت کلی نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.

اگر نقاط کیفی A و B دارای ترتیب‌های مساوی باشند؛ طورمثال $A(x_1,a)$، $B(x_2,a)$ آن‌گاه مستقیمی که از نقاط A و B می‌گذرد، موازی به محور x است و میل آن مساوی به صفر است، یعنی: $m=\dfrac{a-a}{x_2-x_1}=0$



فعالیت

- نقاط $M(3,2)$ و $N(3,5)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی را که از نقاط M و N می‌گذرد، ترسیم کرده، آنرا Δ نام‌گذاری کنید.
- مستقیم Δ با محور x چه نوع زاویه‌یی را می‌سازد؟ در مورد میل مستقیم Δ چه گفته می‌توانید؟

از فعالیت فوق به این نتیجه می‌رسیم: میل مستقیمی را که با محور x زاویهٔ قایمه می‌سازد نمی‌توانیم محاسبه کنیم. در این حالت می‌گوییم مستقیم Δ میل معین ندارد.

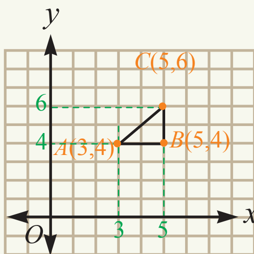
مثال: اگر نقاط $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ و $C(5,6)$ رأس‌های یک مثلث باشند، نوعیت مثلث را مشخص نموده در مختصات کمیات وضعیه آنرا رسم نمایید.

حل: چون $\overline{AB}$ موازی به محور x است پس میل آن صفر است.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{4-4}{5-3}=\frac{0}{2}=0$$

به همین ترتیب $\overline{BC}$ موازی به محور y است؛ لذا میل آن نامعین است.

$$m_{\overline{BC}}=\frac{6-4}{5-5}=\frac{2}{0}=\infty \quad \text{تعریف نشده}$$



$$\overline{AB}^2=(5-3)^2+(4-4)^2=4$$
$$\overline{BC}^2=(5-5)^2+(6-4)^2=4$$
$$\overline{AC}^2=(5-3)^2+(6-4)^2=8$$
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

در نتیجه:

چون قضیهٔ فیثاغورث در مثلث تطبیق گردید، پس $\overline{AB}$ عمود بر $\overline{BC}$ است؛ لذا مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم‌الزاویه است.

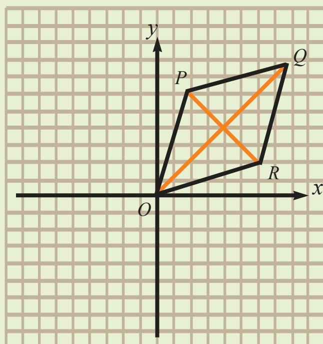
میل هر خط مستقیم موازی با محور x صفر است.
میل هر خط مستقیم عمود بر محور x تعریف نشده است (عدد نامعین است).

تمرین

1- اگر A(3,0) ، B(0,5) ، C(−3,0) و D(0,−5) رأس‌های یک چهار ضلعی باشد.
الف: اضلاع مقابل چهار ضلعی با هم چه ارتباط دارد؟
ب: میل قطرهای آنرا دریابید.

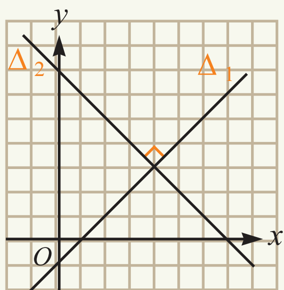
2- نقاط $A(3,4)$, $B(-3,4)$, $C(3,-4)$ و $D(-3,-4)$ را در نظر بگیرید.
الف: مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد، چه رابطه یی با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد، دارد؟
ب: مستقیمی که از نقاط A و C می گذرد، چه رابطه‌با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد، دارد؟
ج: چهار ضلعی ABCD چه نوع چهار ضلعی است؟
د: میل قطرهای آنرا پیدا کنید.

میل مستقیم‌های عمود بر یک دیگر



چهار ضلعی OPQR یک لوزی است. آیا می‌توانید، خصوصیات لوزی را ذریعهٔ مختصات رأس‌های آن بیان نمایید؟

تعریف



دو مستقیم Δ_1 و Δ_2 با میل‌های m_1 و m_2 وقتی بر یک‌دیگر عمود اند که رابطهٔ زیر بین آن‌ها برقرار باشد: $m_1 \cdot m_2 = -1$

مثال 1: مستقیمی که از نقاط A(7,5) و B(1,1) و مستقیمی که از نقاط C(0,5) و D(2,2) می‌گذرد با هم چه رابطه دارند؟

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

چون $m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$ است، پس خطوط $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ با هم عمود اند.

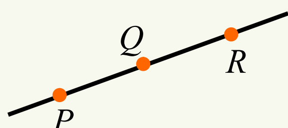
فعالیت

- نقاط $O(0,0)$, $B(1,3)$, $C(4,4)$ و $D(3,1)$ را در مختصات کمیات وضعیه نشان دهید.
- شکل $OBCD$ را رسم کنید.
- طول ضلع های $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ و $\overline{DO}$ را محاسبه کنید.

• نشان دهید که قطرهای OC و BD با هم عمود اند.
می‌دانیم که از هر دو نقطه در یک مستوی، تنها یک خط مستقیم می‌گذرد، در کدام حالت از سه نقطه تنها یک مستقیم می‌گذرد؟

تعریف

نقاط P, Q و R وقتی روی یک مستقیم قرار دارند که میل $\overline{PQ}$ مساوی با میل $\overline{QR}$ باشد.



مثال 2: سه نقطه $A(0,-1), B(2,3), C(-1,-3)$ را در نظر بگیرید و نشان دهید که این سه نقطه روی یک خط مستقیم قرار دارند.

حل: میل AB عبارت است از:
$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

میل $\overline{AC}$ عبارت است از:
$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

میل $\overline{BC}$ عبارت است از:
$$m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

چون میل خطوط $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ با هم مساوی اند، در نتیجه نقاط A, B و C روی یک مستقیم قرار دارند.

• اگر $m_1 \cdot m_2 = -1$ باشد آن دو خط با هم عمود است.

• سه نقطه زمانی روی یک خط قرار دارد که میل هر قطعه خط آن‌ها با همدیگر مساوی باشد.

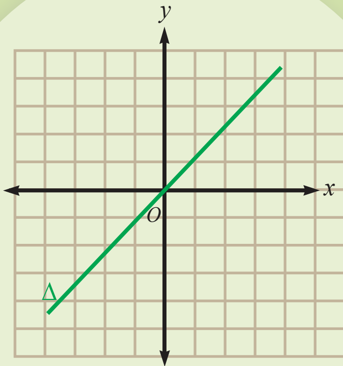
تمرین

1- $A(6,1), B(8,3)$ و $C(6,5)$ سه رأس یک مثلث داده شده است. نشان دهید که مثلث قایم الزاویه است.

2- وضعیت قطعه خط هایی را که از نقاط $A(7,5), B(1,1)$ و نقاط $C(0,5), D(2,2)$ می‌گذرد با همدیگر تعیین کنید.

3- وضعیت قطعه خط هایی که از نقاط $A(2,4)$ و $B(7,5)$ و از نقاط $C(1,-4)$ و $D(-3,-5)$ می‌گذرد؛ با همدیگر تعیین کنید.

معادلهٔ خط مستقیم



چند نقطه را روی خط شــکل مقابل انتخاب کنید.

چه رابطه‌یی بین فاصله و ترتیب نقاط روی خط می‌بینید؟

فعالیت

- نقاط A(1,−1) ، B(−2,2) ، C(4,−4) و D(−3,3) را روی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- از وصل کردن این نقاط با هم کدام شکل حاصل می‌شود؟
- آیا نقاط A(1,1) و B(0,0) روی این شکل قرار دارند؟ چرا؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را می‌توان به صورت کلی طور زیر بیان کرد:

رابطه‌هایی چون $y = x$ و $y = -x$ که رابطه بین فاصله و ترتیب نقاط روی یک خط را نشان می‌دهند معادلهٔ خط مستقیم گفته می‌شود.

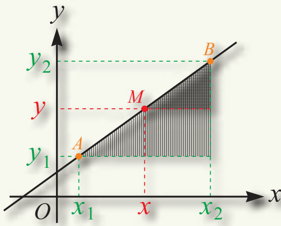
می‌دانیم از هر دو نقطه در یک مستوی تنها و تنها یک خط می‌گذرد، حال می‌خواهیم معادلهٔ خطی را که از دو نقطهٔ کیفی بگذرد، پیدا کنیم.

فعالیت

- دو نقطهٔ کیفی $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ را در سیستم کمیات وضعیه مشخص کنید.
- اگر نقاط A و B با هم وصل شوند، چه به دست می‌آید.
- یـــک نقطهٔ کیفی دیگـــر مانند: $M(x, y)$ را بالای خط مســـتقیم $\overline{AB}$ در نظر گرفته نشانی کنید.
- از نقاط A , M و B بالای محورهای x و y عمودها رسم و نام‌گذاری کنید.

از انجام فعالیت بالا چنین نتیجه‌گیری می‌نماییم:

معادلهٔ خط مستقیمی که از نقاط $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ بگذرد و نقطهٔ $M(x, y)$ نیز بالای این خط مستقیم قرار داشته باشد، دارای شکل زیر است:



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

مثال 1: معادلهٔ خط مستقیمی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(3,4)$ و $B(2,-1)$ بگذرد.

حل: با استفاده از معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد، می توانیم، بنویسیم که:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

$$y=5x-11$$

مثال 2: معادلهٔ خط مستقیمی را بنویسید که محور (x) را در نقطه‌یی به فاصلهٔ ($x=-3$) و محور(y)را در نقطه‌یی به ترتیب ($y=4$) قطع کند.

حل: چون خط مستقیم محور (x) را در نقطه‌یی به فاصلهٔ ($x=-3$) قطع می کند، پس در سیستم کمیات وضعیهٔ مختصات این نقطهٔ تقاطع $(-3,0)$ است. به همین ترتیب محل تقاطع خط با محور y در سیستم کمیات وضعیه $(0,4)$ می‌باشد. حالا با دانستن مختصات دو نقطهٔ یک خط می‌توانیم، معادلهٔ آنرا چنین بنویسیم:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=4(x+3)$$

$$3y-4x=12$$

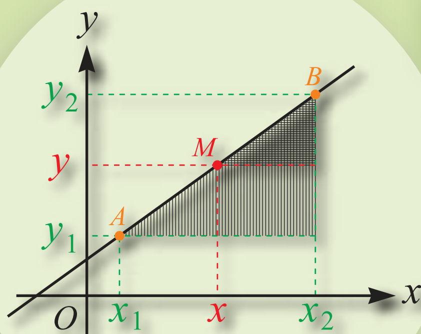
تمرین

1– معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,4)$ بگذرد.

2– معادلهٔ میانهٔ $\overline{AM}$ مثلث را دریابید که رأس های آن $A(1,3)$, $B(-1,4)$ و $C(5,6)$ باشد.

3– معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که محور x را در $A(3,0)$ و محور y را در $B(0,-2)$ قطع کند.

معادلهٔ خط مستقیمی که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد



در شکل مقابل میل $\overline{AB}$ با میل $\overline{MA}$ چه رابطه‌یی دارند؟

آیا میل هر قطعه خط دیگری که روی خط ویا موازی به این خط انتخاب کنیم با میل AB برابر است یا خیر؟ اگر است، چرا؟

می‌دانیم معادلهٔ یک خط مستقیم که دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ آن معلوم باشد، عبارت است از:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

چون $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ میل خط مستقیم را نشان می‌دهد بنابراین معادلهٔ فوق شکل زیر را به خود اختیار می‌کند.

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

معادلهٔ اخیر معادلهٔ خط مستقیمی است که یک نقطهٔ آن $A(x_1, y_1)$ و میل آن، یعنی m معلوم است.

مثال 1: معادلهٔ مستقیمی را بنویسید که از نقطهٔ $(2,3)$ می‌گذرد و میل آن $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: چون میل و یک نقطهٔ مستقیم داده شده، پس از معادلهٔ $y-y_1=m(x-x_1)$ می‌توانیم، بنویسیم:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$2(y-3)=(x-2)$$

$$2y-6=x-2$$

$$2y=x+6-2$$

$$2y=x+4$$

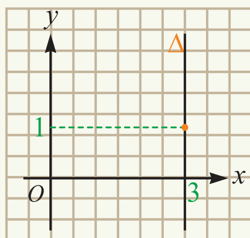
$$y=\frac{1}{2}x+2$$

مثال 2: معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(3,1)$ بگذرد و به محور x موازی باشد، بنویسید.

حل: چون خط موازی به محور x است پس میل آن صفر است، در نتیجه معادلهٔ آن طور زیر به دست می‌آید:

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0$$
$$y=1$$

مثال 3: معادلهٔ خطی را دریافت کنید کــه از نقطهٔ $(3,1)$ بگذرد و با محور y موازی باشد.



حل: چون خط موازی محور y است، پس میل آن تعریف نشده است (معین نیست)؛ ولی می‌دانیم هر نقطه روی این خط دارای فاصلهٔ مساوی به فاصلهٔ نقطهٔ $(3,1)$ قرار دارد، پس معادلهٔ آن به صورت $x=3$ می‌باشد.

معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطهٔ (a,b) می‌گذرد و موازی محور x باشد عبارت است از: $y=b$

معادلهٔ خط مستقیمی که از نقطهٔ (a,b) می‌گذرد و موازی با محور y باشد، عبارت است از: $x=a$

مثال 4: معادلهٔ ناصف عمودی قطعه خط Δ را به دست آرید که از نقاط، $B(-2,4)$ بگذرد.

حل: برای دریافت معادلهٔ ناصف عمودی این قطعه خط ابتدا میل قطعه خط $\overline{AB}$ را به دست آورده و بعد نقطهٔ وسطی آنرا دریافت می‌نماییم.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad\Rightarrow\quad m_{\Delta}=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

مختصات نقطهٔ وسطی خط $\overline{AB}$:

$$(x,y)_{\overline{AB}}=(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{0}{2},\frac{0}{2})=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad\Rightarrow\quad y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

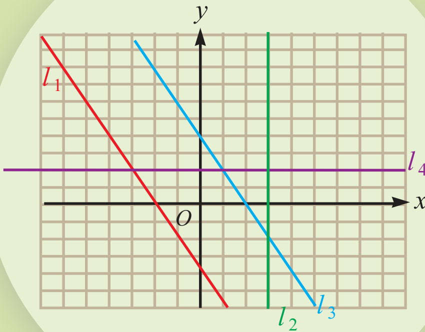
تمرین

1- معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که میل آن 4 و محور y را در نقطهٔ 3- قطع کند.

2- معادلهٔ خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطهٔ $P(5,-4)$ گذشته و میل آن -2 باشد.

3- میل و نقطهٔ تقاطع با محور y را در معادلهٔ $3x+3y-7=0$ دریابید.

شکل عمومی معادلهٔ خط مستقیم



چهار خط l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 نسبت به هم‌دیگر در کدام وضعیت قرار دارند؟

معادلهٔ الجبری یک خط مستقیم که رابطه بین مختصات هر نقطهٔ روی یک خط را نشان می‌دهد، دانستیم. حال شکل عمومی معادلهٔ خط را طور زیر بیان می‌نماییم:

معادلهٔ خط مستقیم در حالت استاندارد (معیاری) به شکل زیر است:

$$ax+by+c=0 \quad \text{یا} \quad y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

که در آن a,b و c اعداد حقیقی و $b\neq 0$ است.

در معادلهٔ فوق $\frac{-a}{b}$ میل خط و $\frac{-c}{b}$ تقاطع با محور y را نشان می‌دهد.

به این ترتیب می‌توان گفت هر مستقیمی که در مستوی دارای معادله‌یی به شکل $y=mx+h$ باشد، در آن m میل خط مستقیم و h ترتیب نقطهٔ تقاطع با محور y است.

در حالت عمومی هر رابطهٔ خطی بر حسب x و y که در آن توان x و y یک باشد، معادلهٔ یک خط مستقیم می‌باشد.

فعالیت

- دو مستقیم $2x+3y-6=0$ و $y-x=2$ را در یک سیستم کمیات وضعیه رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط را به دست آرید.
- این دو خط نسبت با هم در کدام وضعیت قرار دارند؟

از فعالیت فوق می‌توان نتیجه را طور زیر بیان نمود که:

اگر میل دو خط با یک‌دیگر مساوی نباشد آن دو خط یک دیگر را قطع می‌کنند.

در حالت معیاری، اگر دو خط مستقیم $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ متقاطع باشند، میل آن‌ها با هم مساوی نبوده، از آن‌جا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- دو خط مستقیم $-3x+y-5=0$ و $6x-2y+1=0$ را در مختصات کمیات وضعیهٔ قایم رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط را به دست آرید.
- این دو خط نسبت به هم در چه وضعیتی قرار دارند؟ چرا؟

در حالت معیاری دو خط $a_1x+b_1y+c_1=0$ و $a_2x+b_2y+c_2=0$ وقتی موازی می‌باشند که میل‌های آن‌ها مساوی باشد، از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که بین ضرایب متحولین آن‌ها رابطهٔ زیر برقرار است: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ و

اگر بین ضرایب رابطهٔ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ برقرار باشد، در این صورت خطوط منطبق‌اند.

مثال 1: خطوط مستقیم $3x+4y=5$ و $4x-3y=-1$ با هم چه رابطه دارند؟

حل: با استفاده از ضرایب معادلات دو خط داریم که:

$a_1=3 \qquad b_1=4 \qquad c_1=-5$

$a_2=4 \qquad b_2=-3 \qquad c_2=1$

1- چون $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ یعنی $\frac{3}{4}\neq\frac{4}{-3}$ است، پس دو خط متقاطع اند.

2- چون $\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}=-1$ یعنی $\frac{3}{4}\times\frac{4}{-3}=-1$ است، پس این دو خط در نقطهٔ تقاطع با هم عمود اند.

مثال 2: در معادلات زیر قیمت عددی k را چنان تعیین کنید که مستقیم‌ها با هم عمود باشند.

$kx+3y-1=0 \qquad , \qquad 2x-6y+3=0$

حل: شرط عمودیت را تحقیق می‌نماییم.

$a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2=0$

$2\cdot k+3(-6)=0 \Rightarrow k=9$

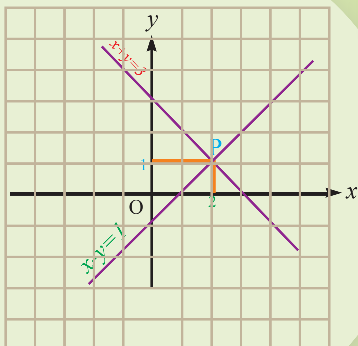
تمرین

1- حالات خطوط $4x+3y-1=0$ و $8x+6y+5=0$ را معلوم کنید.

2- حالات خطوط $8x-4y+10=0$ و $4x-2y+5=0$ را دریافت کنید.

3- قیمت k را در معادلات $(k+1)x+ky=0$ و $2x-3y+5=0$ طوری تعیین نمایید که خطوط با هم موازی باشند.

سیستم معادلات خطی



به شکل مقابل توجه نمایید. آیا مختصات نقطهٔ P در هر دو معادلهٔ خطوط مستقیم صدق می‌کند؟

فعالیت

- میل خطوط $y = 4x - 2$ و $y = -3x + 5$ را به‌دست آرید.
- این دو خط نسبت با هم چه رابطه دارند؟ چرا؟
- دو خط فوق را در یک مستوی کمیات وضعیه رسم کنید. چه رابطه بین خطوط رسم شده مشاهده می‌شود؟

در فعالیت فوق به مشاهده می‌رسد که اگر میل این دو خط با هم مساوی نباشد، هم‌دیگر را در یک نقطهٔ مانند P قطع می‌کنند، چون نقطهٔ تقاطع بالای هر دو خط واقع است، پس مختصات نقطهٔ تقاطع در هر دو معادله صدق می‌کند، اگر مختصات نقطهٔ تقاطع P(x,y) باشد آن‌گاه داریم که:

$$y = 4x - 2 \quad \text{و} \quad y = -3x + 5$$

در نتیجه:

$$4x - 2 = -3x + 5$$
$$7x = 7$$
$$x = 1$$

با وضع کردن قیمت x در معادله های بالا قیمت y را به‌دست می‌آوریم.

$$y = 4x - 2 \quad \Rightarrow y = 4(1) - 2 \quad \Rightarrow y = 2$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع، عبارت است از: $P(1,2)$، در این حالت می‌گوییم، نقطهٔ $P(1,2)$ نقطه‌یی است که در مورد هر دو معادلهٔ خط‌ها صدق می‌کند که حل سیستم معادلات خطی $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ می‌باشد.

فعالیت

- سیستم معادلات خطی مقابل را مد نظر بگیرید. $\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ \text{I}$
- در این سیستم c_1, b_1, a_1 و c_2, b_2, a_2 را به‌نام چه یاد می‌کنند؟
- در معادلات فوق x و y را چه گویند؟
- آیا نقطهٔ تقاطع خطوط، حل سیستم معادلات شده می‌تواند؟

برای حل سیستم معادلات خطی، رابطهٔ (I) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم، در صورتی‌که b_1 و b_2 خلاف صفر باشد.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

پس سه حالت زیر را داریم:

1- اگر میل‌های خطوط مساوی نباشند، در آن‌صورت دو خط یک‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

2- اگر میل‌های خطوط مساوی، ولی تقاطع آن‌ها با محور y در نقاط مختلف باشد، در آن‌صورت خطوط با هم موازی اند.

3- اگر میل خطوط و تقاطع آن‌ها با محور y با هم مساوی باشد، در آن‌صورت خطوط منطبق اند.

مثال 1: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: برای حل، سیستم معادله ها را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = 7 - x \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

در معادله‌ها اخیر میل دو خط فوق 1- و 2- است، از این‌که میل دو خط مساوی نیستند، پس دو خط یک دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. برای دریافت مختصات نقطه تقاطع طور زیر عمل می‌کنیم:

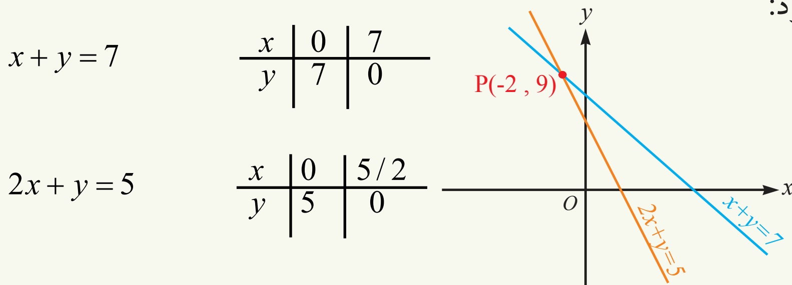
$$-x+7=-2x+5$$

$$-x+2x=5-7 \qquad \Rightarrow x=-2$$

با گذاشتن 2- به عوض x در معادلهٔ یکی از خطوط، داریم که:

$$y=-x+7=-(-2)+7 \Rightarrow y=9$$

بنابر این $(-2,9)$ حل سیستم معادلات و محل تقاطع دو خط است که در شکل زیر دیده می‌شود:



$x+y=7$

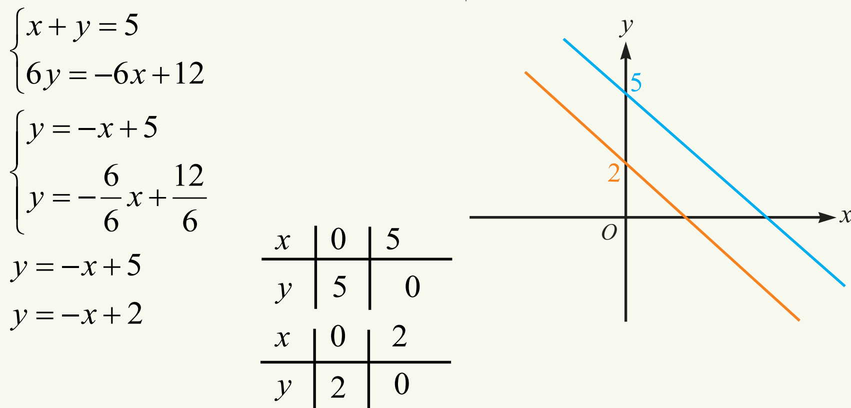
x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	5/2
y	5	0

مثال 2: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

حل: ابتدا معادلات را طور زیر می‌نویسیم:



$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6y=-6x+12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=-\frac{6}{6}x+\frac{12}{6} \end{cases}$$

$$y=-x+5$$

$$y=-x+2$$

x	0	5
y	5	0

x	0	2
y	2	0

چون میل هر دو خط مساوی به 1- است در نتیجه خطوط بین خود موازی‌اند و یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند؛ یعنی سیستم معادلات خطوط موازی حل ندارد.

مثال 3: سیستم معادلات خطی را حل نمایید:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

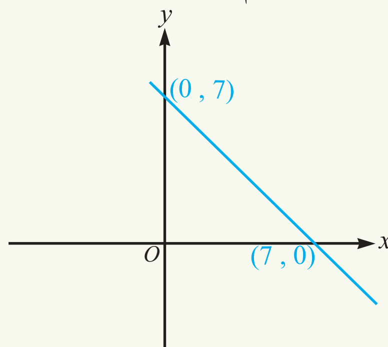
حل: ابتدا سیستم معادلات را طور زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\dfrac{-4}{4}x+\dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



به مشاهده می‌رسد که میل خطوط و تقاطع آن‌ها با محور y نیز مساوی است پس دو خط با هم منطبق اند، در این حالت دو خط نقاط مشترک بی‌شمار دارند، در نتیجه سیستم معادلات خطی حل‌های زیادی دارد.

اگر a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 و c_2 اعداد حقیقی و x،y مجهول‌ها باشند، در آن صورت

سیستم معادلات خطی $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ اند.

- اگر خطوط یک‌دیگر را در یک نقطه قطع نمایند، معادلات یک حل دارد.
- اگر خطوط با یک‌دیگر موازی باشد، معادلات حل ندارد.
- اگر خطوط باهم منطبق باشد، معادلات دارای بی‌نهایت حل است.

تمرین

سیستم معادلات خطی زیر را حل نمایید.

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش تعویضی

$x+y=4$ I
$x-y=6$ II
$y=4-x$
$x-(4-x)=6$
$x=5$

به حل سیستم معادلات خطی توجه کنید، به نظر شما قیمت عددی مجهول x به چه ترتیب به دست آمده است؟

فعالیت

- مجموعهٔ دو زاویهٔ یک مثلث 100° و حاصل تفریق آن 20° است. معادلات الجبری آن را بنویسید.
- سیستم معادلات فوق چند مجهول دارد؟ قیمت عددی هر یک را دریابید.
- قیمت‌های حاصلهٔ معادلات را در سیستم امتحان کنید.

از فعالیت فوق حل مسأله و طریقهٔ حل تعویضی سیستم معادلات خطی را در مثال زیر بیان می‌نماییم.

حل: اگر زوایای مثلث را A و B بنامیم، عبارت فوق را به شکل معادلات الجبری طور زیر می‌نویسیم:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^\circ \quad ....\text{I}$$
$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \quad ....\text{II}$$

حال قیمت A را از جنس B از معادلهٔ اول به دست می‌آوریم: $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$

این قیمت A را در معادلهٔ دوم به عوض A وضع نموده معادله را حل می‌نماییم.

$$100^\circ-\hat{B}-\hat{B}=20^\circ \Rightarrow -2\hat{B}=-80^\circ \Rightarrow \hat{B}=40^\circ$$

حال این قیمت B را در یکی از معادلات سیستم وضع نموده، قیمت عددی A را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ$$
$$\hat{A}-40^\circ=20^\circ \Rightarrow \hat{A}=20^\circ+40^\circ \Rightarrow \hat{A}=60^\circ$$

مثال: سیستم معادلات دو مجهولهٔ زیر را حل نمایید.
$$\begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y=10\end{cases}$$

حل: اول قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر به‌دست آورده، در معادلهٔ دوم آنرا وضع می‌نماییم:

$$2x+3y=0 \Rightarrow 2x=-3y \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$3x+2y=10$$
$$3(-\frac{3}{2}y)+2y=10$$
$$-\frac{9}{2}y+2y=10$$
$$\frac{-9+4}{2}y=10$$
$$-5y=20 \Rightarrow y=-4$$

$$x=-\frac{3}{2}y$$
$$x=-\frac{3}{2}(-4)$$
$$x=-3(-2)$$
$$x=6$$

برای حل سیستم معادلات دو مجهولهٔ درجه اول، طور زیر عمل می‌نماییم.
- قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر دریافت نموده، در معادلهٔ دوم آنرا وضع می‌نماییم.
- معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه یک حاصل شده را برای آن مجهول حل و قیمت مجهول را به‌دست می‌آوریم.
- این قیمت حاصل شده مجهول را در یکی از معادلات داده شده، سیستم وضع کنید. قیمت مجهول دیگر به‌دست می‌آید.
- قیمت‌های به‌دست آمدهٔ مجهول‌ها را در سیستم معادلات وضع نمایید، اگر هم‌زمان در هر دو معادله صدق کند، حل معادله صحیح است، در غیر آن صحیح نیست.

تمرین

حل سیستم معادلات خطی زیر را به روش تعویضی به‌دست آرید.

1) $\begin{cases}y=2x\\x+y=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x-2y=15\\6x-y=10\end{cases}$ 3) $\begin{cases}a+2b=2\\2a-3b=25\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4\\\frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1\\\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4\end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش افنا

$$x + y = ?$$

$$\frac{1}{3}x + y = ?$$

$$x = ?$$

$$y = ?$$

حمیرا به زحـل گفت: اگر پول‌هایت را برایم بدهی، من صاحب 15 افغانی می‌شـوم. زحل به حمیـرا گفت: اگر سـوم حصهٔ پول خود را به من بدهی، من صاحب 5 افغانی می‌شوم. هر کدام آن‌ها چند افغانی دارد؟

فعالیت

- سیستم معادلات خطی را بنویسید که دو معادله با دو مجهول داشته باشد.
- این سیستم را با استفاده از روش گراف حل نمایید.
- حل سیستم فوق را به روش تعویضی به دست آورید.
- آیا روش دیگری برای حل سیستم فوق موجود است؟

یکی از روش‌های دیگر حل سیستم معادلات روش افنا می‌باشد که در مثال زیر آن‌را شرح می‌دهیم:

مثال 1: سیستم معادلات خطی داده شده را حل کنید.

$$7x + 5y = 41 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{I}$$

$$5x - 2y = 7 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{II}$$

حـل: اول معادلات را طوری تغییر شـکل می‌دهیم که اگـر آن‌ها را طرف به طرف جمع یا تفریـق نماییم، یکی از مجهول‌ها افنا (حذف) گردد؛ طور مثال برای افنای مجهول x اطراف معادلـهٔ اول را در ضریب x معادلهٔ دوم یعنی 5 ضــرب و اطراف معادلهٔ دوم را در ضریب x معادلهٔ اول یعنی 7 ضرب می کنیم:

$$\begin{matrix} 5\times \\ 7\times \end{matrix} \begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow 35x + 25y = 205 \\ \Rightarrow 35x - 14y = 49 \end{matrix}$$

معادلات تشکیل شده جدید که در آن ضریب‌های x با هم مساوی گردیده، از هم‌دیگر تفریق می کنیم.

$$\begin{array}{r} 35x+25y=205 \\ \underset{-}{}35x\underset{+}{-}14y=\underset{-}{49} \\ \hline 39y=156 \end{array} \Rightarrow y=\frac{156}{39} \Rightarrow y=4$$

قیمت y را در یکی از سیستم معادله‌های وضع نموده، قیمت عددی مجهول دومی را به‌دست می‌آریم.

$$5x-2y=7$$

$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

مثال 2: سیستم معادلاهای زیر را به طریقهٔ افنا حل کنید:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

حل: ابتدا یکی از مجهول‌ها را حذف می‌نماییم؛ طور مثال y را، بناءً معادلهٔ اول را به 3- ضرب می کنیم و معادلهٔ دوم را به 2 ضرب نموده، حاصل آنرا طرف به طرف جمع می کنیم.

$$\begin{array}{ll} 3x+2y=4 & \Rightarrow -9x-6y=-12 \\ 2x-3y=-1 & \Rightarrow \underline{\underset{-}{}4x\underset{+}{-}6y=\underset{+}{-}2} \\ & -13x+0=-10 \\ & x=\frac{10}{13} \end{array}$$

$$3(\frac{10}{13})+2y=4 \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$

$$2y=4-\frac{30}{13} \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$

$$2y=\frac{22}{13} \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

- هر مجهولی را که می‌خواهیم، افنا نماییم، ضریب آنرا مد نظر گرفته، ضریب مجهول افنا شدنی معادلهٔ اول را در معادلهٔ دوم و به همین ترتیب ضریب مجهول افنا شدنی معادلهٔ دوم را در معادلهٔ اول ضرب می‌دهیم.
- معادلات حاصل شده را از هم‌دیگر تفریق می کنیم که قیمت یک مجهول به‌دست می‌آید. این قیمت حاصل شده را در یکی از معادلات سیستم وضع نموده، قیمت عددی مجهول دومی را به‌دست می‌آوریم.

تمرین

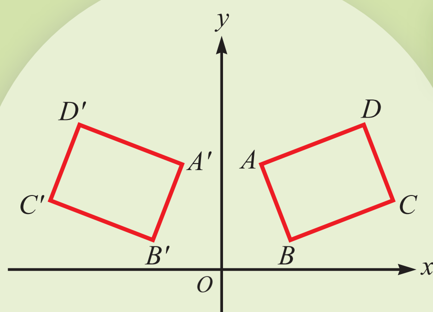
حل سیستم معادلات خطی زیر را به طریقهٔ افنا به‌دست آرید.

1) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-39 \\ x-y=9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5 \\ \frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y+x-1=0 \\ 2x+y-9=0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 10x+3y=26 \\ 8x+3y=18 \end{cases}$

تغییر مکان

Transformation



در رابطه‌های فوق چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی را می‌بینید؟

فعالیت

- نقاط $A(1,2)$, $B(-2,3)$ و $C(2,-4)$ را در سیستم کمیات وضعیه تعیین نمایید.
- به مختصهٔ x این نقاط 2 واحد افزود سازید.
- نقاط حاصله را در همان سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.

در فعالیت فوق دیدیم که هر نقطهٔ کیفی، مانند (x,y) یک مستوی را می‌توان به $(x+2,y)$ منتقل ساخت، در چنین حالتی می گوییم نقطهٔ جدید تصویر نقطهٔ داده شده در مستوی تحت تبدیل $(x+2,y)$ است.

رابطه‌یی که به هر نقطه‌یی از مستوی کمیات وضعیه تنها و تنها یک نقطهٔ جدید را نسبت دهد، یک تغییر مکان یا تبدیل در مستوی خوانده می‌شود.

مثال: تصویر نقاط $E(4,1)$، $D(1,2)$ و $C(2,4)$ را تحت تبدیل‌های زیر در مستوی به دست آرید.

$b: \quad (x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ $\qquad a: \quad (x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y)$

$d: \quad (x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ $\qquad c: \quad (x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$

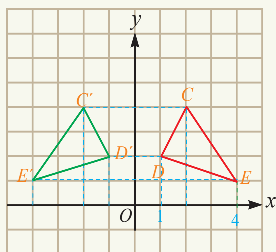
حل: ابتدا نقاط را در کمیات وضعیه تعیین می‌نماییم.

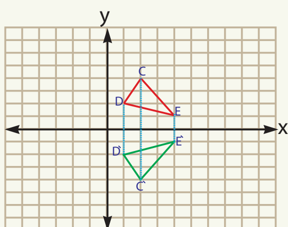
a: تحت تبدیل $(x,y)\xrightarrow{T_1}(-x,y)$ داریم که:

$$T(4,1)=(-4,1)$$

$$T(1,2)=(-1,2)$$

$$T(2,4)=(-2,4)$$



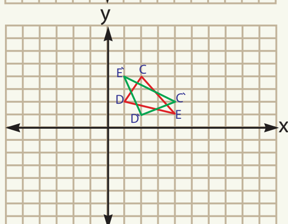


b: تحت تبدیل $(x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ داریم که:

$R(4,1)=(4,-1)$

$R(1,2)=(1,-2)$

$R(2,4)=(2,-4)$

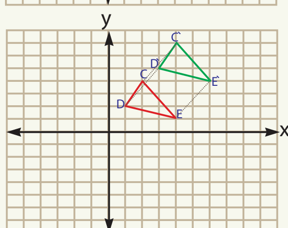


c: تحت تبدیل $(x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ داریم که:

$M(4,1)=(1,4)$

$M(1,2)=(2,1)$

$M(2,4)=(4,2)$



d: تحت تبدیل $(x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ داریم که:

$S(4,1)=(6,4)$

$S(1,2)=(3,5)$

$S(2,4)=(4,7)$

در مثال فوق می‌توان نشان داد که تحت تبدیل‌های داده شده، فاصلهٔ نقاط تغییر نمی کند؛ به طور مثال: اگر $T(C)=C'$ و $T(E)=E'$ باشد، پس $\overline{EC}=\overline{E'C'}$ است.

تبدیل‌هایی که فاصله بین نقاط را حفظ می کند ایزومتری (Isometry) نامیده می‌شود.

اگر شکلی توسط یک ایزومتریک تغییر مکان نماید، با اصل شکل انطباق‌پذیر است.

تمرین

1- تصویر نقاط $(-3,1)$ ، $(-2,-2)$ ، $(1,-1)$ و $(3,3)$ را تحت تبدیل‌های زیر در کمیات وضعیه به دست آرید.

a: $(x,y)\xrightarrow{T_1}(x-1,y+2)$

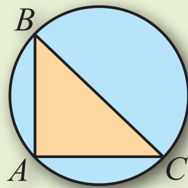
b: $(x,y)\xrightarrow{T_2}(2x,y)$

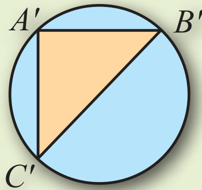
c: $(x,y)\xrightarrow{T_3}(x+5,0)$

d: $(x,y)\xrightarrow{T_4}(0,y-2)$

e: $(x,y)\xrightarrow{T_5}(3x-1,y+2)$

انتقال
Translation





در شکل مقابل، مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در مستوی حرکت کرده و در موقعیت جدید $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ تغییر محل نموده است. آیا می‌توانید، تغییر مکان این حرکت را شرح دهید؟

فعالیت

- یک مثلث کیفی $\overset{\Delta}{ABC}$ در کمیات وضعیه رسم کنید و مختصات رأس‌های آن را به دست آرید.
- مختصات رأس‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را به اندازهٔ 2 واحد در جهت مثبت محور x و 1 واحد در جهت مثبت محور y حرکت دهید، نقاط جدید را B', A' و C' بنامید.
- نقاط B', A' و C' را با هم وصل نموده، مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ را از نظر طول اضلاع و شکل ظاهری با هم مقایسه کنید.

هرگاه همه نقاط یک شکل را به یک جهت معین در یک فاصله حرکت دهیم، شکل حاصله با شکل اولی انطباق پذیر است. این حرکت را به‌نام انتقال یاد نموده، آن‌را طور زیر نشان می‌دهند.

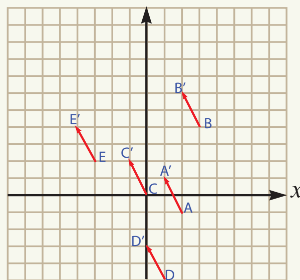
$$T(x,y)=(x+h,y+K)$$

که در آن h و k اعداد حقیقی استند.

مثال 1: تصویرهای نقاط $A(2,-1)$، $B(3,4)$، $C(0,0)$، $D(1,-5)$ و $E(-3,2)$ را در کمیات وضعیه تحت رابطهٔ انتقال $T(x,y)=(x-1,y+2)$ نشان دهید.

حل: ابتدا نقاط را روی کمیات وضعیه تعیین نموده، بعداً نقاط را تحت رابطهٔ انتقال $T(x,y)=(x-1,y+2)$ به دست می‌آوریم.

$$A(2,-1), T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$$
$$B(3\ ,\ 4), T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$$
$$C(0\ ,\ 0), T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$$
$$D(1\ ,-5), T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,-3)$$
$$E(-3\ ,2), T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,4)$$

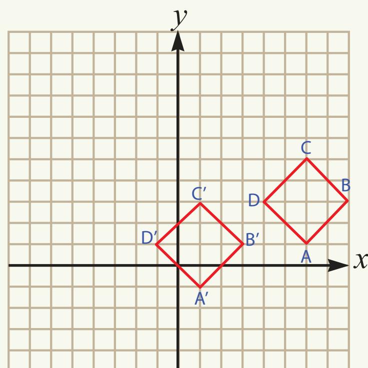


در مثال فوق با وصل نمودن نقاط تصویر دیده می‌شود، قطعه خط های $\overline{DD'}, \overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'}$ و $\overline{EE'}$ با یک‌دیگر موازی و مساوی اند به نام وکتور انتقال یاد می‌شود.

مثال 2: اگر $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ ، $C(6,5)$ و $D(4,3)$ رأس‌های یک مربع باشد، آن را در کمیات وضعیه تحت رابطهٔ انتقال $T(x,y)=(x-5, y-2)$ رسم نمایید.

حل: منطقهٔ مربع $ABCD$ تحت انتقال، چهار ضلعی $A'B'C'D'$ است.

$$A(6,1), T_A=(6-5\ ,\ 1-2)\quad \Rightarrow A'=(1,-1)$$
$$B(8,3), T_B=(8-5\ ,\ 3-2)\quad \Rightarrow B'=(3,1)$$
$$C(6,5), T_C=(6-5, 5-2)\quad \Rightarrow C'=(1,3)$$
$$D(4,3), T_D=(4-5, 3-2)\quad \Rightarrow D'=(-1,1)$$



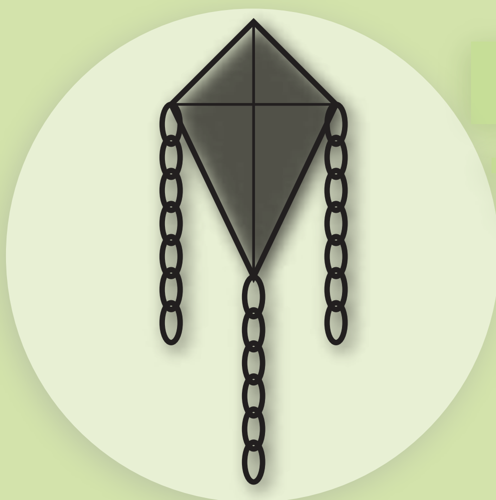
انتقال یک رابطهٔ ایزومتری است.

تمرین

1- اگر $M(1,-1), N(2,-5)$، $O(2,5)$ و $P(3,3)$ یک چهار ضلعی باشد، چهار ضلعی و تصویرش را تحت رابطهٔ $T(x,y)=(x+9\ ,\ -y)$ رسم نمایید.

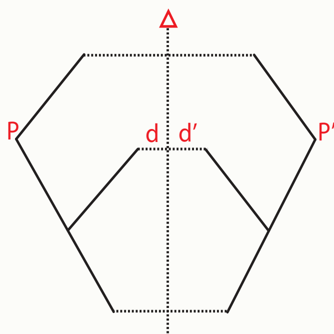
2- $I(5,0), L(7,0)$ و $O(5,3)$ رأس‌های مثلث اند. مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x,y)=(-y+3, x-3)$ رسم نمایید.

انعکاس
Reflection



در تصویر کاغذپران دقت کنید، به نظر شما این کاغذپران نسبت به کدام یک از اقطار خود متناظر است؟

فعالیت



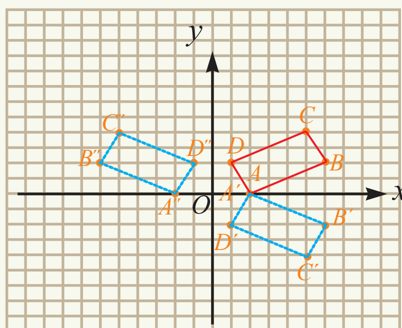
- یک شکل را در وسط یک صفحهٔ کاغذ رسم نمایید.
- همه خطوط آن‌را به رنگ آبی یا توشی که رنگ آن به زودی جذب کاغذ نشود رنگ کنید.
- کاغذ را به وسط آن طوری قات نمایید که به یک‌طرف صفحهٔ قات شده شکل قرار گیرد.
- صفحه را باز نموده کدام شکل را به مقابل شکل اصلی می‌بینید. فرق بین آن‌ها چیست؟

تعریف

اگر هر نقطهٔ یک شکل (P) به یک نقطه از شکل (p') طوری تبدیل گردد که فاصله‌های هر نقطه از شکل (P) نظر به یک محور (Δ) مساوی به هر نقطه از شکل (p') باشد، آن تبدیل را به نام انعکاس نسبت به محور Δ یاد می کنند که محور (Δ) را محور انعکاس گویند.

مثال 1: هرگاه $A(2,0)$، $B(6,2)$، $C(5,4)$ و $D(1,2)$ رأس‌های یک مستطیل باشند، مستطیل را در کمیات وضعیهٔ قایم رسم نموده، تصویر آن‌را نظر به هر دو محور رسم نمایید.

حل: هرگاه تصویر مستطیل $ABCD$ را نظر به محور y رسم نماییم، در این صورت تنها مختصهٔ x آن به $(-x)$ تبدیل می‌گردد و اگر تصویر آنرا نسبت به محور x رسم نماییم، تنها مختصهٔ y آن به y- تبدیل می‌گردد، طوری که در شکل دیده می‌شود.



نقاط $(x\ ,\ y)$	انعکاس نظر به محور x $(x\ ,\ -y)$	انعکاس نظر به محور y $(-x\ ,\ y)$
$A(2\ ,\ 0)$	$A'(2\ ,\ 0)$	$A''(-2\ ,\ 0)$
$B(6\ ,\ 2)$	$B'(6\ ,\ -2)$	$B''(-6\ ,\ 2)$
$C(5\ ,\ 4)$	$C'(5\ ,\ -4)$	$C''(-5\ ,\ 4)$
$D(1\ ,\ 2)$	$D'(1\ ,\ -2)$	$D''(-1\ ,\ 2)$

تغییر مکان $T(x,y)=(-x,y)$ انعکاس نسبت به محور y است.

تغییر مکان $T(x,y)=(x,-y)$ انعکاس نسبت به محور x است.

تغییر مکان $\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{y},\mathrm{x})$ انعکاس نسبت به مستقیم $\mathrm{y}=\mathrm{x}$ است.

تمرین

1- اگر $A(3,1)$, $B(7,1)$ و $C(3,-1)$ رأس‌های یک مثلث باشند، مثلث و تصویرش را تحت رابطه‌های انعکاس زیر رسم کنید.

$a:\ R_1(x,y)=(-x,y)$ $\quad$ $b:R_2(x,y)=(x,-y)$

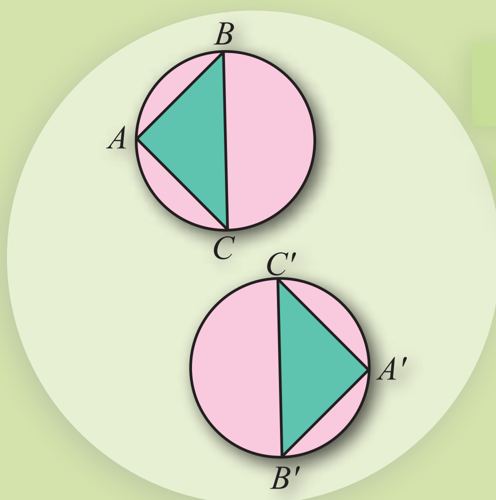
$c:\ R_3(x,y)=(y,x)$ $\quad$ $d:R_4(x,y)=(-y,-x)$

2- اگر $A(0,2)$, $B(-5,0)$، $C(-3,-5)$ و $D(2,-3)$ رأس‌های یک مربع باشند مربع و تصویرش را تحت رابطهٔ انعکاس $R(x,y)=(-y\ ,-x)$ رسم کنید.

3- نقاط $A(1,4)$, $B(3,-2)$ و $C(5,1)$ رأس‌های یک مثلث اند. تصویر مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را نظر به محورهای x و y تحت رابطهٔ:

- $x+2=0$ رسم کرده آنرا $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بنامید.
- $y+3=0$ رسم کرده آنرا $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید.

دوران
Rotations



در شکل مقابل، $\overset{\Delta}{ABC}$ در یک مستوی حرکت کرده و در موقعیت جدید $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ قرار گرفته است. آیا می‌توانید تبدیل مانند این حرکت را شرح دهید؟

فعالیت

مدل مقابل، دو موقعیت مختلف را در چرخ بازی اطفال نشان می‌دهد.

- باتوجه به شکل، مشاهده می‌شود که A' متناظر A و B' متناظر با نقطهٔ B است. دو زاویهٔ AOA' و BOB' را اندازه‌گیری کرده با هم مقایسه کنید.
- حال یک نقطهٔ دل‌خواه را روی موقعیت اول چوکی چرخ‌بازی اطفال انتخاب کنید و آن را P بنامید، زاویهٔ POP' را اندازه نمایید.
- نقطهٔ متناظر P را در موقعیت دوم چوکی پیدا کرده آن‌را P' بنامید.

با در نظر داشت فعالیت فوق، دوران را به عنوان یک تغییر مکان در مستوی، طور زیر تعریف می کنیم:

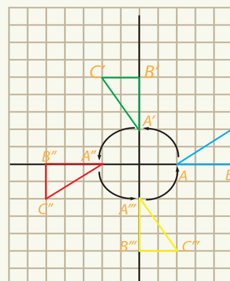
اگر یک شکل در مستوی حول یک نقطهٔ ثابت O به اندازهٔ یک زاویهٔ ثابت α دوران کند، همهٔ نقاط آن به عین زاویه دوران می کند.

در این حالت نقطهٔ ثابت O را مرکز دوران و زاویهٔ ثابت α را زاویهٔ دوران گویند.

مثال : $A(2,0)$, $B(5,0)$ و $C(5,2)$ رأس‌های یک مثلث اند، در یک مستوی کمیات وضعیهٔ مثلث ABC و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیل‌های زیر رسم کرده، سپس هر تبدیل را شرح دهید.

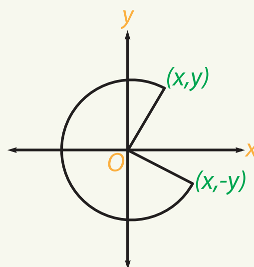
الف: $R_1(x,y)=(-y,x)$ ب: $R_2(x,y)=(-x,-y)$ ج: $R_3(x,y)=(y,-x)$

حل:

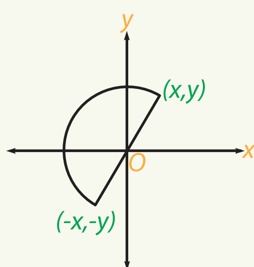


نقطه	تصویر		
(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(x,-y)
A(2,0)	A′(0,+2)	A″(-2,0)	A‴(0,-2)
B(5,0)	B′(0,+5)	B″(-5,0)	B‴(0,-5)
C(5,2)	C′(-2,5)	C″(-5,-2)	C‴(2,-5)

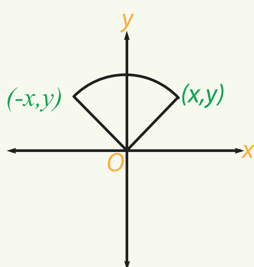
با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که تبدیل‌های R_1 ، R_2 و R_3 دوران‌های به مرکز مبدأ کمیات وضعیه و به ترتیب به زاویه‌های 90° ، 180° و 270° اند.



R(x,y)=(y,-x)
مرکز دوران (0,0)
زاویهٔ دوران 270°



R(x,y)=(-x,-y)
مرکز دوران (0,0)
زاویهٔ دوران 180°



R(x,y)=(-y,x)
مرکز دوران (0,0)
زاویهٔ دوران 90°

تعریف

1- اگر $A(0,0)$، $B(6,-2)$ و $C(7,1)$ رأس‌های یک مثلث باشند.

الف: شکل و تصویر مثلث ABC را تحت تبدیل $R(x,y)=(-y,x)$ رسم کنید.

ب: طول اضلاع مثلث و تصویرش را با هم مقایسه کنید، آیا این دوران یک ایزومتری است؟

2- اگر $A(-1,-2)$، $B(7,2)$ ، $C(5,6)$ و $D(-3,2)$ رأس‌های یک مستطیل باشند.

الف: مستطیل و تصویرش را تحت دوران $R(x,y)=(-y,-x)$ رسم کنید.

ب: طول اضلاع و مساحت مستطیل و تصویرش را با هم مقایسه کنید.

نکات مهم فصل سوم

- دو محور افقی و عمودی در یک مستوی که یک‌دیگر را عموداً قطع نموده باشد، به نام سیستم کمیات وضعیه یاد می‌شود.
- محور افقی کمیات وضعیه را به نام محور فاصله و محور عمودی کمیات وضعیه را به نام محور ترتیب و محل تقاطع آن‌را مبدأ گویند.
- فاصله بین دو نقطه از رابطهٔ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ به دست می‌آید.
- مختصات نقطهٔ وسطی هر قطعه خط از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ به دست می‌آید.
- در قطعه خطی که مختصهٔ y آن صفر باشد، مختصات نقطهٔ وسطی آن خط از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ به‌دست می‌آید.
- در قطعه خطی که مختصهٔ x آن صفر باشد، مختصات نقطهٔ وسطی آن خط از رابطهٔ $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$ به دست می‌آید.
- میل هر خط مستقیم از رابطهٔ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ به دست می‌آید.
- میل هر خط مستقیم مربوط به زاویه‌یی است که مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد.
- هر مستقیم که با جهت مثبت محور x زاویهٔ حاده بسازد، میل آن مثبت و اگر زاویهٔ منفرجه بسازد، میل آن منفی است.
- مستقیم‌های موازی دارای میل‌های مساوی اند.
- میل هر مستقیم موازی با محور x صفر و میل هر مستقیم عمودی بر محور x تعریف نشده است.
- دو مستقیم وقتی با هم عمود اند که حاصل ضرب میل‌های آن‌ها مساوی به (-1) شود.
- سه نقطهٔ اختیاری زمانی بالای یک خط مستقیم قرار می‌گیرند که میل هر قطعه خط آن‌ها با هم مساوی باشند.
- رابطه‌یی که به هر نقطه از مستوی کمیات وضعیه تنها و تنها یک نقطهٔ جدید را نسبت دهد، یک تغییر مکان یا تبدیل گفته می‌شود.
- هر گاه همه نقاط یک شکل به یک جهت معین و به یک فاصله حرکت دهیم، شکل حاصله با شکل اولی انطباق‌پذیر است. این حرکت را انتقال گویند.
- اگر یک شکل در یک مستوی به اطراف یک نقطهٔ ثابت (O) به اندازهٔ یک زاویهٔ α دوران کند، همه نقاط آن به عین زاویه دوران می‌کند. این حرکت دوران نامیده می‌شود.

تمرین فصل سوم

• در سوالات زیر به هر سوال چهار جواب داده شده است، درست ترین گزینه را انتخاب کنید.

1- حاصل ضرب میل‌های دو خط عمود بالای هم‌دیگر:

a) (1) است.　b) صفر است.　c) ∞ است.　d) منفی یک است.

2- معادلهٔ خط مستقیم که میل و تقاطع آن با محور y معلوم باشد، عبارت است از:

a) $y = mx$　b) $y = b$　c) $y = mx + b$　d) $y - y_1 = m(x - x_1)$

3- معادلهٔ خط مستقیم که دو نقطهٔ آن معلوم باشد، عبارت است از:

a) $y = mx + b$　b) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$　c) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$　d) $y = mx$

4- مختصات نقطهٔ وسطی دو نقطه $A(0, y_1)$ و $B(0, y_2)$ عبارت است از:

a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$　b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$　c) $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$　d) $M(0,0)$

5- مختصات نقطهٔ وسطی دو نقطه $A(x_1, 0)$ و $B(x_2, 0)$ عبارت است از:

a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$　b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$　c) $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$　d) $M(0,0)$

6- فاصله بین دو نقطهٔ A و B از کدام فورمول زیر به‌دست می‌آید:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$　b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$　d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- فاصله بین یک نقطه و مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از:

a) $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$　b) $d = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$　d) $d = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- میل یک خط مستقیم عبارت است از:

a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$　b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$　c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$　d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دو مستقیم وقتی با هم موازی‌اند که:

a) میل‌های آن‌ها با هم مساوی باشند.　b) میل‌های آن‌ها مساوی نباشند.

c) حاصل ضرب میل‌های آن‌ها منفی یک باشد.　d) همه درست است.

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در سیستم کمیات وضعیه محور x را محور ...... و محور y را محور .... گویند.

2- در ناحیهٔ دوم نقاطی قرار دارند که x آن‌ها .... و y آن‌ها .... است.

3- در ناحیهٔ سوم نقاطی قرار دارند که هم x و هم y آن‌ها.............................. است.

4- مستقیمی که با جهت مثبت محور x زاویه حاده بسازد میل آن .... است.

5- دو مستقیم موازی که با جهت مثبت محور x زوایای .... می‌سازد.

6- میل هر مستقیم موازی با محور x .... است.

7- سه نقطه زمانی بر یک خط مستقیم قرار دارند که میل هر قطعه خط آن‌ها با هم............... باشد.

8- اگر میل دو خط با یک‌دیگر مساوی نباشد، آن دو خط .... اند.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام یک از آن‌ها غلط‌اند. در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) بگذارید.

1- (   ) اگر به هر نقطه‌یی از مستوی کمیات وضعیه یک و تنها یک نقطهٔ جدید را نسبت دهد، تبدیل در مستوی نامیده می‌شود.

2- (   ) اگر هر نقطه‌یی از شکل P به یک نقطه از شکل P' طوری تبدیل گردد که فاصله‌های هر نقطه از شکل P نظر به یک محور مساوی به هر نقطه از شکل P' باشد، این تبدیل یک انعکاس است.

3- (   ) تبدیل $T(x,y)=(-x,y)$ انعکاس نسبت به محور y است.

4- (   ) تبدیل $T(x,y)=(x,-y)$ انعکاس نسبت به محور x است.

5- (   ) تبدیل $T(x,y)=(y,x)$ انعکاس نسبت به مستقیم $y=x$ است.

6- (   ) انتقال عبارت از تغییر مکانی است که در آن جهت فواصل و وسعت زوایا ثابت باقی بماند.

7- (   ) اگر یک شکل در یک مستوی حول یک نقطهٔ ثابت (O) به اندازهٔ یک زاویهٔ α دوران کند، همه نقاط آن به عین زاویه دوران می‌کند.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- نقطه‌هایی را که کمیات وضعیهٔ آن در زیر داده شده، در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

$1:(0,1)$ $2:(2,3)$ $3:(0,-4)$ $4:(5,0)$

2- فاصله بین هر جوره از نقطه‌هایی را که کمیات وضعیهٔ آن‌ها ذیلاً داده شده است، معلوم کنید.

$1:(0,9),(-5,4)$ $2:(4,1),(3,-2)$ $3:(-7,4),(1,-11)$

3- نشان دهید که نقطه‌های داده شدهٔ زیر رأس‌های یک مثلث قایم‌الزاویه بوده و مساحت آن‌ها را نیز به دست آرید.

$1:(0,9),(-4,-1),(3,2)$ $2:(3,-2),(-2,3),(4,-4)$

4- نشان دهید که نقطه‌های داده شدهٔ زیر بالای یک خط مستقیم قرار دارند.

$1:(0,4),(3,-2),(-2,8)$ $2:(1,2),(-3,10),(4,-4)$

5- میل و یک نقطهٔ خطوط در زیر داده شده است، معادله‌های آن‌ها را به دست آرید.

$1:(2,3),m=-\frac{1}{2}$ $2:(-4,1),m=-\frac{2}{3}$ $3:(-1,-4),m=-2$

6- اگر رأس‌های یک مستطیل $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(3,-1)$ و $(1,-3)$ باشد، مساحت آن‌را دریافت نمایید.

7- اگر رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع $(2,4)$,$(5,9)$, $(4,9)$ و $(1\ ,4)$باشد، طول اقطار آن‌را دریابید.

8- نشان دهید که نقاط $(-3,1)$, $(-9,4)$, $(12,0)$و $(6,3)$رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع است.

9- اگر رأس‌های یک مثلث $(5,0)$, $(-3,2)$ و $(1,-3)$ باشند، کمیات وضعیهٔ نقطه‌های وسطی اضلاع آن را به دست آرید.

10- ثبوت نمایید که:

الف) قطرهای مربع، بالای یک‌دیگر عمود اند.

ب) قطرهای مستطیل، یک‌دیگر را نصف می‌نمایند.

11- معادلهٔ عمود وسطی مستقیم را که از نقاط $A(3,-1)$, $B(5,3)$ می‌گذرد، دریابید.

12- معادلات خطوط مستقیمی را دریابید که از نقطهٔ $P(4,5)$ گذشته و به ترتیب یکی آن با محور x و دیگر آن با محور y موازی باشد.

13- هر گاه $A(5,0)$, $B(7,0)$ و $C(5,3)$ رأس‌های یک مثلث باشند.

الف: مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ رسم کنید.

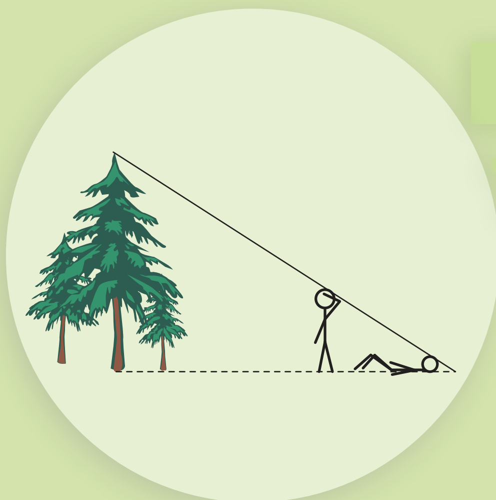
ب: تصویر ABC را ابتدا تحت دوران $R(x,y)=(-y,x)$ پیدا کرده آن‌را $A'B'C'$ به‌نامید، سپس تصویر $A'B'C'$ را تحت انتقال $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تعیین کنید.

فصـــل چهارم

مثلثات



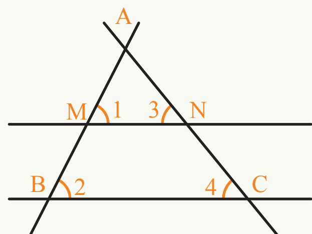
قضیهٔ تالس در مثلث



دو شاگرد با هم‌دیگر صحبت نمودند که چطور طول یک درخت را اندازه کنند؟
یکی آن‌ها به دیگری پیشنهاد زیر را داد و خودش به روی زمین دراز کشید و از رفیق خود خواست تا آن‌قدر حرکت نماید که سر او و نوک درخت را روی یک خط مستقیم ببیند، به درستی پیشنهاد شاگرد فکر کنید.

فعالیت

- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ، $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ می‌باشد. اندازهٔ هر قطعه خط را توسط خط‌کش معلوم نموده، در جاهای خالی بنویسید.



$AM = ___$ $AN = ___$ $MN = ___$

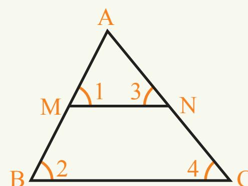
$AB = ___$ $AC = ___$ $BC = ___$

- زاویه‌هایی را که با هم مساوی‌اند، نشان دهید.
- نسبت‌های $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ ، $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ و $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ را پیدا نموده بگویید که این نسبت‌ها با هم چه رابطه دارند.

از فعالیت بالا می‌توانیم قضیهٔ تالس را طور زیر بیان نماییم:

در مثلث کیفی $\overset{\triangle}{ABC}$ اگر به یکی از اضلاع مثلث خط موازی رسم نماییم، نسبت اضلاع مثلث تشکیل شده به اضلاع مثلث ABC با هم مساوی است. این قضیه را به‌نام قضیهٔ تالس در مثلث می‌گویند.

ثبوت: چون در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ، $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ است می‌توانیم بنویسیم که:



$\hat{1} = \hat{2}$....... متوافقه

$\hat{3} = \hat{4}$....... متوافقه

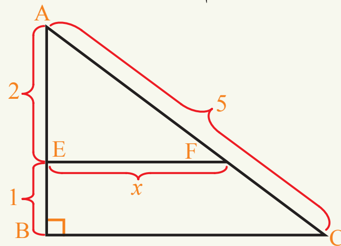
$\hat{A} = \hat{A}$.....مشترک

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AMN}$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

مثال 1: مثلث قایم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ را که $\overline{EF}$ موازی به $\overline{BC}$ است در نظر گرفته طول اضلاع قایم وخط موازی $\overline{EF}$ مثلث را دریابید.

حل: چون در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ است بناءً نظر به قضیهٔ تالس گفته می‌توانیم که این دو مثلث با هم متشابه‌اند، لذا می‌توانیم بنویسیم که:



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$5^2 = BC^2 + 3^2$$

$$BC^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\boxed{BC = 4}$$

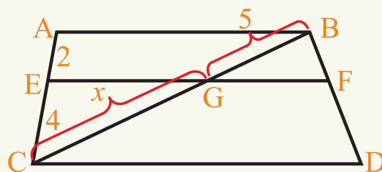
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{4}$$

$$x = \frac{8}{3} = 2.6$$

مثال 2: در ذوذنقهٔ زیر $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$، مقدار x را تعیین کنید.

حل: قطعه خط $\overline{EG}$ موازی به ضلع $\overline{AB}$ است، نظر به قضیهٔ تالس داریم که:



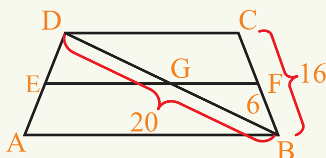
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

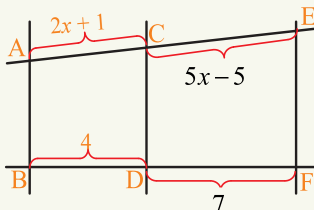
تمرین

1- در اشکال ذوذنقه، مقدار x را تعیین کنید.

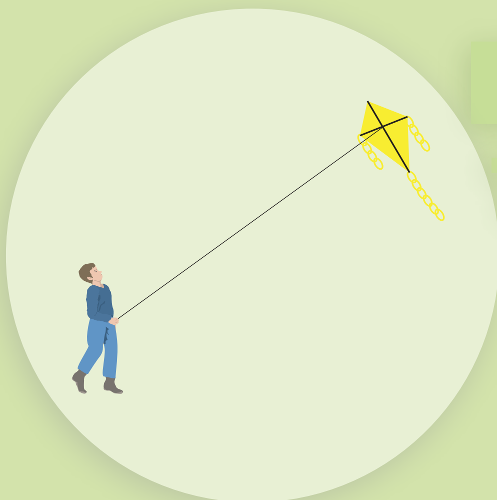




2- مقدار x را در شکل زیر تعیین کنید، در صورتی که $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ باشد.



ساین یک زاویهٔ حاده

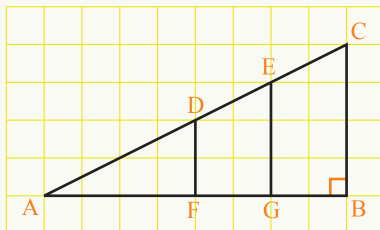


اگر کاغذ پران در هوا در حال پرواز باشد، چگونه می‌توانید فاصلهٔ آن را از زمین به دست آرید؟

فعالیت

• در مثلث قایم‌الزاویهٔ $\overset{\square}{ABC}$ بالای وتر $\overline{AC}$ نقاط D و E را انتخاب کرده‌ایم، از این نقاط به ضلع $\overline{CB}$ در مثلث موازی‌ها رسم نموده، نقاط تقاطع آن‌ها را به ضلع $\overline{AB}$ به ترتیب F و G بنامید.

• با استفاده از خط‌کش اضلاع مثلث را اندازه گرفته و نسبت‌های $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ و $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ را محاسبه نموده با هم مقایسه کنید.

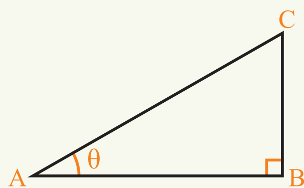


• آیا با تغییر محل نقاط D و E نسبت‌های $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ و $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ تغییر می‌کند؟

• آیا با تغییر محل نقاط روی $\overline{AC}$، در مقدار زاویهٔ A تغییری ایجاد می‌کند؟

• اکنون $\overline{AB}$ را ثابت نگه‌دارید و زاویهٔ $\hat{A}$ را افزایش دهید. فکر کنید تساوی نسبت‌های فوق چگونه اتفاق می‌افتد؟ تحقیق کنید.

تعریف

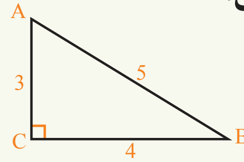


در هر مثلث قایم‌الزاویه نسبت ضلع مقابل یک زاویهٔ حاده بر طول وتر، همیشه مقدار ثابت است؛ که به اندازهٔ زاویهٔ حاده بسته‌گی دارد. این نسبت را $\sin\theta$ (ساین زاویهٔ حاده) می‌نامیم:

$$\sin\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} : \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

مثال 1: در شکل زیر مقدار $\sin A$ و $\sin B$ را به دست آورید.

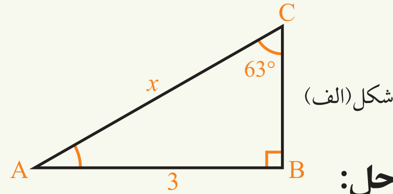
حل:



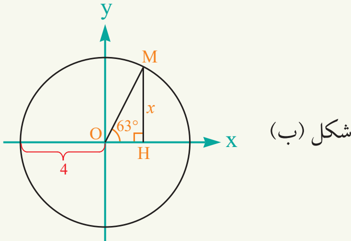
$$\sin A = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ B}}{\text{طول ضلع وتر}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin B = 0.6$$

مثال 2: اگر $\sin 63^\circ$ مساوی به 0.891 باشد، در اشکال زیر مقدار x را دریابید.



شکل (الف)



شکل (ب)

حل:

جزء الف: با استفاده از تعریف ساین یک زاویهٔ حاده، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\sin 63^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

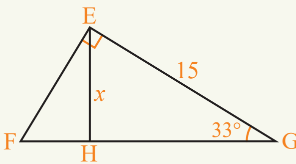
$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \Rightarrow x \approx 3.37$$

جزء ب:

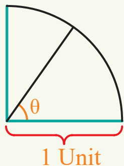
$$\sin 63^\circ = \frac{\overline{MH}}{\overline{OM}}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

تمرین



1- اگر $Sin 33^{o}$ مساوی به $0,5446$ باشد، در شکل مقابل قیمت عددی x را دریابید.



2- شکل ربع دایرهٔ مقابل را در نظر بگیرید.

الف) اگر زاویهٔ θ بزرگ شود، $\sin\theta$ چگونه تغییر می کند؟

ب) اگر زاویهٔ θ به صفر نزدیک شود، $\sin\theta$ به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

ج) اگر زاویهٔ به 90° نزدیک شود، $\sin\theta$ به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

3- زوایای 40°، 65° و 80° را به ترتیب رسم نموده، سپس بر روی هر زاویه یک مثلث قایم‌الزاویهٔ جداگانه رسم نمایید. با استفاده از خط‌کش و اندازه‌گیری اضلاع $\sin 65^\circ$ ، $\sin 40^\circ$ و $\sin 80^\circ$ را دریابید و با هم مقایسه کنید.

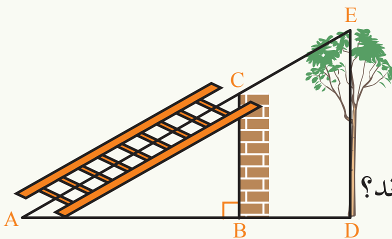
4- یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ $\hat{B} = 54^\circ$ و به قاعدهٔ 8 واحد رسم کنید. اگر یک ضلع آن 5 واحد باشد، ساین زاویهٔ B را دریابید.

کوساین یک زاویهٔ حاده



یک درخت ناجو عقب یک دیوار قرار دارد. یک شاگرد می‌خواهد، بداند درخت از دیوار چقدر فاصله دارد. برای این کار فقط یک زینه دارد، فکر کنید او چه فکر می‌کرد؟

فعالیت

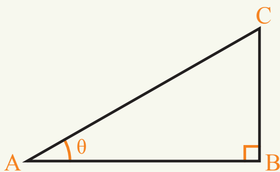


- مثلث‌های تشکیل شده در شکل را نام ببرید.
- $\overline{BC}$ و $\overline{DE}$ با هم چه رابطه‌یی دارند؟ چرا؟
- مثلث‌های ABC و ADE با هم چه رابطه‌یی دارند؟
- فاصلهٔ زینه را الی دیوار و بعد الی درخت به‌دست آرید.
- به کمک قضیهٔ تالس مساوات زیر را تکمیل و طول $\overline{AE}$ را به دست آرید.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\dots}{\overline{AE}}$$

- این مقدار به چه چیزی بسته‌گی دارد؟

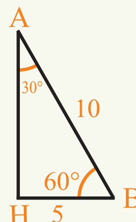
به صورت عموم، در مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC که یک زاویهٔ حادهٔ آن θ است، نسبت طول ضلع مجاور این زاویه بر طول وتر مثلث را به‌نام $\text{cosine}\theta$ (کوساین زاویهٔ θ) یاد می‌کنند.



$$\cos\theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

مثال: در مثلث قایم‌الزاویه AHB اگر زاویهٔ $\hat{A}=30^\circ$ و زاویهٔ $\hat{B}=60^\circ$ باشد، نشان دهید که: $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ و $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

حل: با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث ارتفاع AH را می‌توانیم چنین به‌دست آوریم:



$$AB^2=AH^2+HB^2$$

$$10^2=AH^2+5^2 \Rightarrow AH^2=100-25=75$$

$$AH=\sqrt{75} \Rightarrow AH=5\sqrt{3}$$

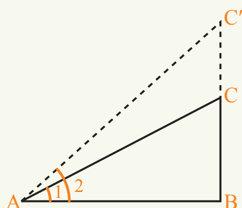
$$\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{BH}{AB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{BH}{AB}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}, \cos 30^\circ=\frac{AH}{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرین

1- اگر یک زاویهٔ حاده بزرگ شود، اندازهٔ کوساین آن چه تغییری می کند؟ با استفاده از مثلث مقابل و دایرهٔ مثلثاتی نظر خود را بیان نمایید.

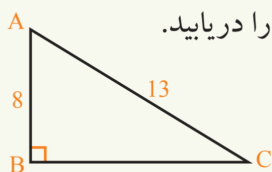
- یک نسبت برای $\cos A_1$ بنویسید.
- یک نسبت برای $\cos A_2$ بنویسید.
- علامه‌های مناسب را در خانه‌های خالی بگذارید.



AC ☐ AC'

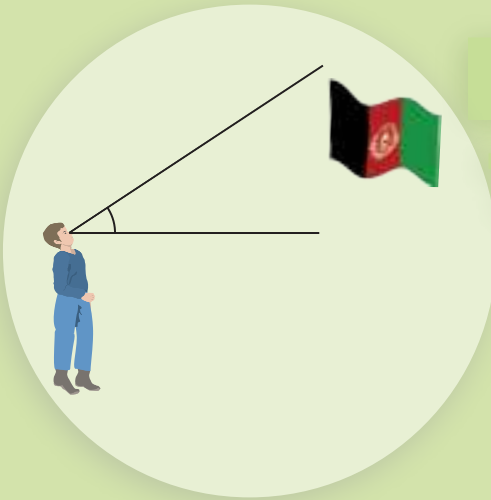
$\cos A_1$ ☐ $\cos A_2$

3- در مثلث قایم‌الزاویهٔ زیر قیمت عددی $\sin A$ و $\cos A$ را دریابید.



4- در مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC که طول اضلاع آن 8,6 و 10 واحد است، نسبت‌های مثلثاتی $\sin A$ و $\cos A$ را محاسبه نمایید.

تانجانت یک زاویهٔ حاده



یک شاگرد به مقابل بیرق ایستاد شده، فکر می کند که طول میلهٔ بیرق را چگونه دریافت کند؟

فعالیت

در مثلث $\overset{\Delta}{BAC}$ که زاویهٔ $\hat{A}$ آن زاویهٔ قایمه است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\hat{B}$ $(\sin\hat{B}, \cos\hat{B})$ را در نظر بگیرید. قطعه خط $\overline{MN}$ موازی به $\overline{AC}$ رسم شده است.

- با در نظرداشت مثلث $\overset{\Delta}{BAC}$، sinB و cosB را بر حسب اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{BAC}$ بنویسید.
- $\frac{\sin B}{\cos B}$ را بر حسب اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{BAE}$ بنویسید.
- با استفاده از مثلث BMN، sinB، cosB و $\frac{\text{sinB}}{\text{cosB}}$ را بر حسب اضلاع مثلث بنویسید.
- فکر می کنید اگر در مثلث فوق $\frac{\cos B}{\sin B}$ را پیدا کنیم، آیا این نسبت به طول اضلاع بسته گی پیدا می کند یا تنها به مقدار زاویه بسته گی دارد؟

نتیجه 1: در یک مثلث قایم‌الزاویه نسبت طول ضلع مقابل یک زاویهٔ حاده بر طول ضلع مجاور آن زاویه مقدار ثابتی است که به‌نام $\tan\theta$ (تانجانت زاویهٔ حاده) یاد می گردد.

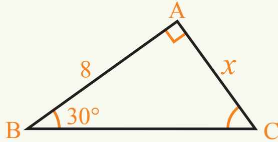


$$\tan\theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ } \theta}{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ } \theta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

نتیجه 2: تانجانت زاویهٔ حاده (θ) برابر است با نسبت ساین زاویهٔ حاده بر کوساین همان زاویه.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

نتیجه 3: نسبت $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ مقدار دیگری است که آن را به نام $\text{cotangent}\,\theta$ (کوتانجانت زاویهٔ θ) یا نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ θ بر طول ضلع مقابل زاویهٔ θ را به‌نام $\cot\theta$ یاد می‌کنند این نسبت مانند نسبت‌های مثلثاتی دیگر تنها به اندازهٔ زاویه ارتباط دارد.



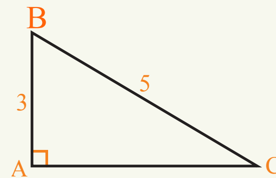
مثال 1: درمثلث زیر اگر $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ باشد، قیمت $\tan 30^\circ$ را به دست آرید.

حل: با استفاده از تعریف $\tan\theta$ می‌توانیم بنویسیم که:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \div 8 \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال 2: مثلث قایم‌الزاویه $B\hat{A}C$ در زیر ترسیم گردیده است. در این مثلث نسبت‌های $\tan\theta$، $\cos\theta$ و $\cot\theta$ را به دست آورده و رابطهٔ $\tan\theta$ را با نسبت $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مقایسه کنید.

حل: ابتدا با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث در مثلث $B\hat{A}C$ طول $\overline{AC}$ را پیدا می‌کنیم.



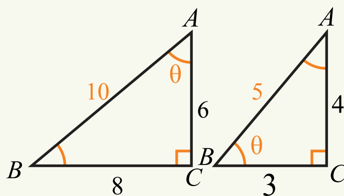
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin C = \frac{3}{5} \qquad \cos C = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot C = \frac{4}{3}$$

تمرین

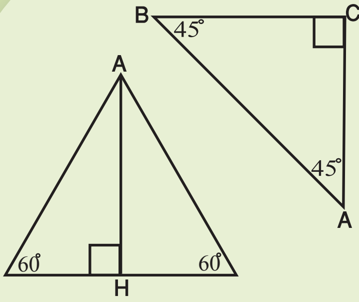


1- از شکل‌های زیر $\sin\theta$, $\cos\theta$، $\tan\theta$ و $\cot\theta$ را دریابید.

2- در مثلث $\overset{\square}{ABC}$ که اضلاع آن با هم مساوی است $\tan\hat{A}$ و $\tan\hat{B}$ را دریابید.

3- در یک مثلث قایم‌الزاویه اگر قاعدهٔ آن ثابت نگه داشته شود و زاویهٔ حادهٔ آن بزرگ شود، در نسبت $\tan\theta$ آن چه تغییری رخ می‌دهد؟

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص (°30، °45، °60 و °90)



مثلث‌های مقابل، چه نوع مثلث‌ها می‌باشد؟ آن‌ها را نام گرفته، طول اضلاع آن را مشخص سازید.

فعالیت

- یک مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ را رسم نمایید.
- ارتفاع $\overline{AH}$ آن را رسم کنید، ارتفاع در این نوع مثلث کدام خاصیت‌ها را داراست؟
- با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث اندازهٔ ارتفاع مثلث مذکور را دریافت نمایید.
- آیا می توانید قیمت‌های عددی نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را دریافت کنید؟
- یک مثلث متساوی‌الساقین قایم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ABC}$ را طوری رسم نمایید که طول ساق‌های آن یک واحد طول باشد.
- هر یک از زاویه‌های حاده چند درجه است؟ اندازهٔ طول وتر آن را محاسبه کنید.
- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° را به دست آرید.

برای انجام فعالیت بالا می‌توانیم از جدول زیر استفاده نماییم:

زاویه / نسبت‌های مثلثاتی	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

مثال: در رابطه‌های زیر قیمت‌های عددی x و y را دریابید:

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$

2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$

3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ$

4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$

5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ$

6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: در رابطه‌های فوق به عوض هر نسبت مثلثاتی قیمت عددی آن را وضع می‌نماییم:

$$1)\ x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2)\ y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$3)\ x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

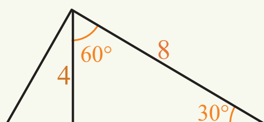
$$4)\ y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

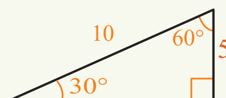
$$5)\ x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

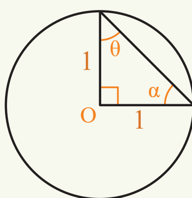
$$6)\ y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$$

تمرین

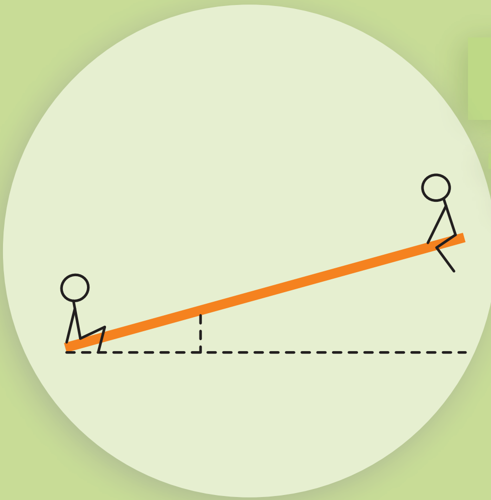
در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی sin، cos، tan و cot زوایای 30°، 45° و 60° را دریابید:







رابطهٔ میل خط مستقیم و تانژانت زاویهٔ میل آن



میل رافعه به چه بستگی دارد؟

فعالیت

• نقاط $C(1,0)$، $B(0,0)$ و $A(1,3)$ را روی مستوی کمیات وضعیه نشان دهید. مثلثی که رأس‌های آن نقاط فوق‌الذکر می‌باشد چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

• میل خط $\overline{AB}$ را به دست آرید.

• معادلهٔ خط $\overline{AB}$ را به شکل $y = mx + h$ بنویسید.

• $\tan A$ را به‌دست آرید. چه رابطه‌یی با میل خط $\overline{AB}$ دارد؟

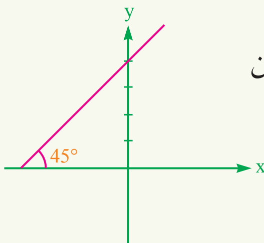
• دو نقطهٔ کیفی روی خط $\overline{AB}$ را در نظر بگیرید. با داشتن مختصات این نقاط میل خط را پیدا کنید. آیا برابری میل خط با $\tan B$ دیده می‌شود؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که میل خطی که با محور x زاویهٔ حاده را می‌سازد، برابر است با تانجانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور x یعنی درمعادلهٔ $y = mx + h$، $m = \tan A$

مثال 1: خط مستقیم Δ محور y را در نقطهٔ 4 قطع می کند و با جهت مثبت محور x زاویهٔ 45° را می‌سازد. معادلهٔ خط دلتا را بنویسید، اگر $\tan 45^\circ = 1$ باشد.

حل: می‌دانیم که معادلهٔ خط مستقیم $y = mx + h$ است بنابراین اول میل خط را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ m &= \tan 45^\circ \\ m &= 1 \\ h &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= mx + h \\ y &= x + 4 \end{aligned}$$



مثال 2: در معادلهٔ خط مستقیم $\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3}$ میل و زاویهٔ میل مستقیم و تقاطع آن را با محور y دریابید.

حل: اول معادلهٔ خط مستقیم را به شکل استندرد $y = mx + h$ تبدیل می‌نماییم و بعداً میل و تقاطع آن با محور y به آسانی دریافت می گردد.

$$\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

آیا می توانید رابطهٔ بین مثلثات و قضیهٔ فیثاغورث را پیدا کنید؟

فعالیت

یک مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC که طول اضلاع قایم آن 6 و 8 است، رسم کنید. زاویهٔ قایمه را A بنامید.

$\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ و $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ را محاسبه کنید.

$\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ و $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ را بر حسب اضلاع $\overline{AB}, \overline{AC}$ و $\overline{BC}$ بنویسید. چه نتیجه می گیرید.

از فعالیت بالا به مشاهده رسید که مجموع مربع ساین یک زاویهٔ حاده و مربع کوساین یک زاویهٔ حاده مساوی به یک است. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

بعضی اوقات علامت توان را برای ساده سازی به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

متوجه باشید که توان 2 به ساین زاویه تعلق دارد نه به خود زاویه، پس $\sin A^2 \neq \sin^2 A$

تمرین

1- معادلهٔ خط مستقیمی را به دست آرید که با جهت مثبت محور x زاویهٔ 60° را تشکیل دهد و محور y را در نقطهٔ $(0,5)$ قطع کند.

2- در معادلهٔ مستقیم $y = x + 4$ میل، زاویهٔ میل و تقاطع با محور y را دریابید.

3- ثبوت کنید:

a) $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

b) $1 + \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

c) $\dfrac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

d) $\dfrac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

جدول مثلثاتی و کاربرد آن



آیـا نسـبت‌های مثلثاتی زوایـا را در شکل مقابل (دایرهٔ مثلثاتی) نشان داده می‌توانید؟

فعالیت

- یک مثلث با متساوی الاضلاع را رسم کرده اندازهٔ هر زاویهٔ آنرا تعیین کنید.
- در یک مثلث نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را دریابید.
- در یک مثلث نسبت‌های مثلثاتی زوایای 45° را دریابید.
- آیا نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را در شکل فوق پیدا کرده می‌توانیم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

نتیجه:

نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زوایا را می‌توانیم به آسانی به‌دست آورد؛ ولی محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی یک عده از زوایا کار مشکل است. بنابراین برای این کار از طرف بعضی علما توسط فورمول‌های خاص جدول‌ها ترتیب گردیده که با استفاده از این جدول‌ها می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به‌دست آریم.

قابل تذکر است که در ترتیب جدول از مثلث قایم‌الزاویه و زاویهٔ θ و رابطهٔ $(90-\theta)$ یا $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ استفاده گردیده است.

0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	**78°** 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	**77°** 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	**76°** 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	**75°** 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	**74°** 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	**73°** 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	**72°** 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	**71°** 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	**70°** 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	**69°** 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	**68°** 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56° 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

فعالیت

به جدول توجه کنید.

• سطر و ستون اول جدول چه را نمایش می‌دهد؟

• ستون اول طرف راست و چپ جدول به کدام زاویه شروع و به کدام زاویه ختم شده؟

• سطر اول و سطر اخیر، جدول، چه نمایش می‌دهد؟

• هرگاه یک زاویهٔ $45°$ و یا از $45°$ کوچک‌تر باشد، نسبت ملثاتی آنرا در طرف چپ جدول در ستون درجه پیدا می‌نمایم و از طرف بالا یا پایین می‌خوانیم، اگر زاویه از $45°$ بزرگ‌تر باشد، چه می‌کنیم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

اگر زاویهٔ $45°$ کوچک‌تر باشد، آن زاویه را در ستون اول سمت چپ جدول و نسبت مثلثاتی آنرا به‌طرف بالا در سطر اول پیدا می‌نمایم.

اگر زاویه از $45°$ بزرگ‌تر باشد آن زاویه را در ستون اول سمت راست جدول و نسبت مثلثاتی آنرا از پایین به طرف بالا در سطر آخرین پیدا می‌نمایم.

مثال 1: کوساین $30°\ 10'$ را دریابید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت چپ جدول زاویهٔ مطلوب($30°\ 10'$) را می‌یابیم و در سطر اول جدول نسبت مثلثاتی آنرا دریافت نموده، تقاطع سطر و ستون عدد (0,8646) را نشان می‌دهد که کوساین $30°\ 10'$ است.

$$30°10' - - - 0,8\,6\,46 \qquad \cos(30°10') = ?$$

(° ، cos)

مثال 2: کوساین $84°\ 50'$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت راست جدول زاویهٔ $84°\ 50'$ را پیدا می‌نماییم و در سطر اخیر جدول نسبت مثلثاتی مطلوب را می‌یابیم. تقاطع این سر و ستون عدد (0,9959) را می‌دهد که کوساین $84°\ 50'$ است.

$$\sin 84°50' = ? \qquad 0,9\,9\,59 - - - 84\ 50°$$

(sin ، °)

یادداشت:

جدول، نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که تفاوت شان هرده دقیقه باشد، برای ما نشان داد که نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را نمی‌توانیم از این جدول به دست آوریم. بنابراین می‌خواهیم طریقه‌یی را بیان نماییم که توسط آن نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه به‌دست می‌آید و این طریقه را انترپولیشن (Interpolation) می‌نامند؛ در مثال‌های زیر آن‌را مطالعه می‌نماییم.

مثال 1: تانجانت $\tan 42^\circ 35'$ را به‌دست آرید.

حل: در جدول تانجانت $42^\circ 35'$ موجود نیست؛ اما تانجانت $42^\circ 40'$ و $42^\circ 30'$ در جدول موجود است که با استفاده از آن نسبت مثلثاتی زاویه $42^\circ 35'$ را دریافت می‌نماییم.

$\tan 42^\circ 40' = 0{,}9217$

$\tan 42^\circ 35' = x$

$\tan 42^\circ 30' = 0{,}9163$

(فرق زاویه‌های اول و دوم: 5، فرق زاویه‌های اول و سوم: 10؛ فرق تانجانت‌ها: x و 0,0054)

فرق نسبت‌های مثلثاتی		فرق دو زاویه
0.00054	:	10'
x	:	5'

دیده می‌شود، تفاوت دو زاویهٔ اول و دوم $5'$ و زوایای اول و سوم $10'$ است، به همین ترتیب تفاوت تانجانت آن x و $0{,}0054$ است؛ البته هرگاه زاویه به اندازهٔ $5'$ فرق داشته باشد tan به اندازه $0{,}0054$ فرق پیدا می‌کند و اگر زاویه به اندازهٔ $10'$ فرق داشته باشد، تانجانت $0{,}0054$ آن به اندازهٔ x فرق می‌کند پس با استفاده از تناسب می‌توانیم این گونه بنویسیم.

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0{,}0054} \Rightarrow x = 0{,}0027$$

قیمت را با زاویهٔ کوچک جمع می‌نماییم: $0{,}9163 + 0{,}0027 = 0{,}9190$

$$\tan 42^\circ 35' = 0{,}9190$$

تمرین

با استفاده از جدول نسبت‌های مثلثاتی $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ زوایای $\alpha = 35^\circ 20'$ و $\alpha = 75^\circ 10'$ را دریابید.

حل مثلث‌های قایم‌الزاویه



در شــکل مقابل ارتفاع منار را چطور می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت

• هرگاه یک زاویهٔ مثلث قایم‌الزاویه $30^\circ\ 40'$ باشد، زاویهٔ دیگر آنرا دریابید.

• هرگاه یک زاویهٔ مثلث قایم‌الزاویه 29° و وتر آن $25m$ باشد، عناصر نامعلوم مثلث را دریابید.

• هرگاه دو ضلع مثلث قایم‌الزاویه یا یک ضلع و یک زاویهٔ حادهٔ آن معلوم باشد، عناصر دیگر مثلث را چطور پیدا کرده می‌توانیم؟

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

در هر مثلث قایم‌الزاویه اگر زاویهٔ حاده و دو ضلع آن معلوم باشد، اجزای متباقی مثلث را با استفاده از توابع مثلث به‌دست می‌آوریم.

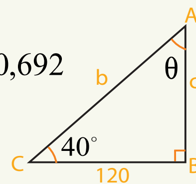
مثال 1: هرگاه یک زاویهٔ حادهٔ مثلثاتی قایم‌الزاویه 40° و ضلع مجاور این زاویه 120 واحد طول باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

حل: از این که یک زاویه و دو ضلع مثلث نامعلوم است، پس با استفاده از اجزای معلوم، اجزای نامعلوم را طور زیر به‌دست می‌آوریم.

1, $\theta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

2, $\tan 40^\circ = \dfrac{c}{120} \Rightarrow c = 120\tan 40^\circ = 120 \cdot 0,8391 = 100,692$

3, $\cos 40^\circ = \dfrac{120}{b} \Rightarrow b = \dfrac{120}{\cos 40^\circ} = \dfrac{120}{0,7660} = 156.6579$



مثال 2: وتر یک مثلث قایم‌الزاویه $49.7unit$ و یک ضلع قایم آن $25unit$ باشد، مثلث مذکور را حل کنید.

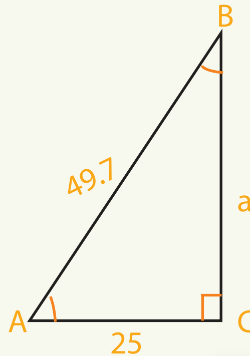
حل: دیده می‌شود که دو عنصر مثلث معلوم است، پس عناصر نامعلوم را به گونه یی زیر دریافت می‌نماییم.

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8° = 59°,48'$$

$$2)B = 90° - \hat{A} \quad \Rightarrow B = 90 - 59,8° = 30,2° = 30°12'$$

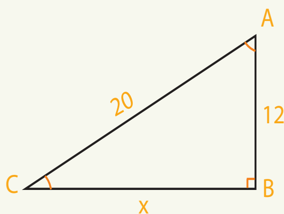
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



تمرین

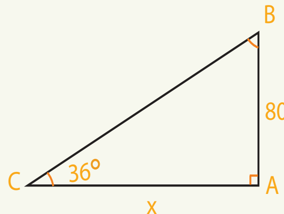
1- اگر یک زاویهٔ حادهٔ مثلث قایم‌الزاویه $38° 50'$ و ضلع مجاور این زاویه 311 واحد باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

2- در اشکال زیر عناصر مجهول را دریافت نمایید.



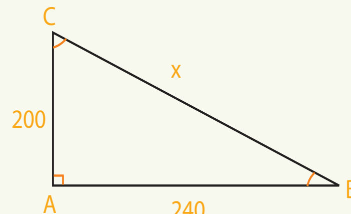
$x = ?$

$\hat{A} = ?$



$x = ?$

$\hat{B} = ?$

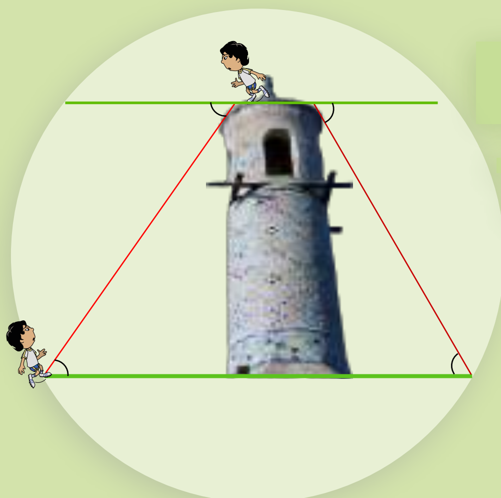


$\hat{B} = ?$

$\overline{BC} = ?$

زوایای میل، ارتفاع و تنزیل

به شـکل مقابل توجه نموده، زوایای میل و تنزیل را نشان دهید.



فعالیت

- هرگاه احمد به یک ارتفاع قرار گیرد، خط دید و سطح افق چه نوع زاویه را می‌سازد و این زاویه به نام چه یاد می گردد؟
- هر گاه یک شی در پایین قرار داشته باشد، خط دید با سطح افق کدام زاویه را می‌سازد و این زاویه به نام چه یاد می گردد؟

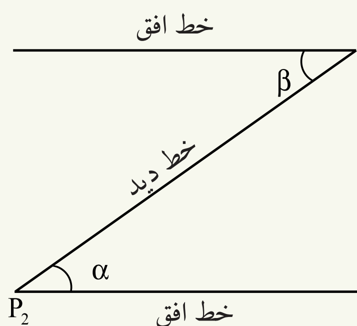
نتیجه:

1- زاویهٔ ارتفاع Angle of Elevation

هرگاه یک جسم در یک ارتفاع قرار گیرد، خط دید با افق یک زاویه را تشکل می‌دهد، که زاویهٔ ارتفاع نامیده می‌شود، مانند زاویهٔ α در شکل زیر.

2- زاویهٔ تنزیل Angle of Depression

هرگاه یک جسم در پایین قرار داشته باشد، خط دید با سطح افق یک زاویه را تشکیل می‌دهد که زاویهٔ تنزیل نامیده می‌شود مانند زاویهٔ β در شکل.



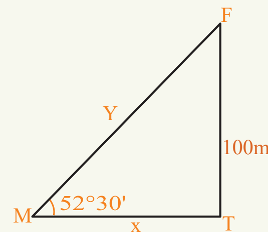
مثال 1: در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{MTF}$ زاویهٔ ارتفاع $52^\circ 30'$ و ارتفاع مثلث $100m$ است، قاعده و وتر مثلث را دریابید.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow X = 76.73m$$

$$Sin\, 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{y}$$

$$y = \frac{100}{Sin\, 52^\circ 30'} = \frac{100}{0,7934} \Rightarrow y = 126,04$$

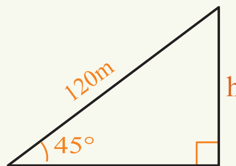


مثال 2: طول تار یک کاغذپران $120m$ است و زاویهٔ ارتفاع کاغذپران 45° است، ارتفاع کاغذپران را دریابید.

$$Sin\, 45^\circ = \frac{h}{120}$$

$$h = 120.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

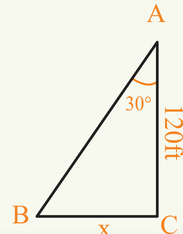
$$h = 60\sqrt{2}m$$



مثال 3: یک برج ترسد از بحر $120ft$ ارتفاع دارد و زاویهٔ نزولی که کشتی از برج دیده می‌شود 30° است، کشتی متذکره از برج چقدر فاصله دارد.

$$\tan 30^\circ = \frac{X}{120}$$

$$X = 120.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}\, ft$$

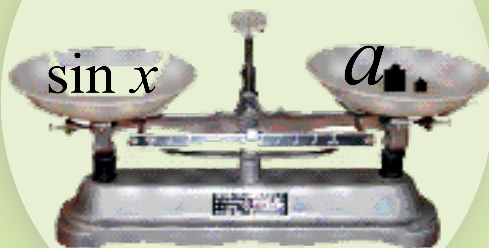


تمرین

1- ارتفاع درختی را دریابید که زاویهٔ ارتفاع آن از 20° به 40° تبدیل گردد. در این حالت مشاهده $75ft$ به درخت نزدیک می گردد.

2- یک درخت را باد از طرف بالا طوری شکسته که تنهٔ درخت وحصهٔ شکستهٔ آن یک مثلث قایم‌الزاویه را با زمین می‌سازد. اگر قسمت شکسته با زمین 50° زاویه را تشکیل داده باشد و تنهٔ شکسته شدهٔ درخت $20ft$ باشد، ارتفاع درخت را دریابید.

معادله های مثلثاتی



رابطهٔ مثلثاتی مساوی به چیست؟ واضح سازید.

می‌دانیم که مطابقت، مساواتی را گویند که برای همه قیمت‌های متحول اطراف مساوات با هم برابر گردد و معادله مساواتی است که برای بعضی از قیمت‌های متحول اطراف مساوات با هم برابر گردد.

فعالیت

- رابطه بین مثلثات و قضیهٔ فیثاغورث را نشان دهید که آیا این رابطه مطابقت است یا معادله؟
- مطابقت و معادله چه فرقی با هم دارند؟ این فرق را در مثلثات تحقیق نمایید.
- در رابطهٔ $\sin x = 1$ مجهول X است یا sin

نتیجهٔ فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نمایم.

تعریف

هر معادله که در آن یک یا چند نسبت مثلثاتی موجود باشد، معادلهٔ مثلثاتی نامیده می‌شود؛ مانند: $\sin x - 1 = 0$ یا $2\cos x - 1 = 0$

– آن زاویه یا قوسی که نسبت مثلثاتی آن مطلوب باشد، مجهول اصلی نامیده می‌شود.

مثلاً: در معادلهٔ بالا x مجهول اصلی است.

– نسبت مثلثاتی مجهول اصلی را مجهول فرعی می‌نامند؛ طور مثال: در معادلهٔ فوق.

برای حل معادله‌های مثلثاتی طور زیر عمل می‌نمایم:

1 - با کمک حل معادله‌های الجبری قیمت مجهول را به‌دست می‌آوریم.

2 - با کمک جدول نسبت‌های مثلثاتی قیمت مجهول اصلی را به‌دست می‌آوریم.

3 - چون معادله‌های مثلثاتی پیریودیک است، بناءً حل‌های بی‌شمار دارد. پس با استفاده از فورمول‌های زوایایی که نسبت‌های مثلثاتی یک‌سان دارد، حل‌های معادله‌اند.

مثال 1: حل معادله‌های مثلثاتی $2\sin x-\sqrt{2}=0$ و $\cos x+\frac{1}{2}=1$ را دریابید.

$$\cos x+\frac{1}{2}=1 \qquad 2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2} \qquad 2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2} \qquad \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x=30^\circ=\frac{\pi}{6} \qquad x=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

تمرین

حل معادله‌های زیر را دریابید.

$c)\ 2\cos 4x-\sqrt{2}=0 \qquad b)\ 2\sin 3x+\sqrt{3}=0 \qquad a)\ \sqrt{3}\cot x-1=0$

نکات مهم فصل چهارم

- مثلثات (Trigonometry) از دو کلمهٔ یونانی (Trigon)؛ یعنی مثلث و (metron)؛ یعنی اندازه کردن تشکیل شده و عبارت از علمی است که از روابط بین عناصر مثلث بحث می کند.
- اگر به یک ضلع مثلث یک موازی رسم گردد، اضلاع قطع شده را به قطعات متناسب تقسیم می‌نماید. این قضیه به نام قضیهٔ تالس یاد می‌شود.
- در هر مثلث قایم‌الزاویه نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده بر طول وتر را، به نام sine زاویهٔ حاده یاد می کنند.
- در هر مثلث قایم‌الزاویه نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده بر وتر را، به نام cosine زاویهٔ حاده یاد می کنند.
- در هر مثلث قایم‌الزوایه نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده بر طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده به نام tangent زاویه حاده یاد می‌شود.
- در هر مثلث قایم الزاویه نسبت $\sin\theta$ یک زاویهٔ حاده بر $\cos\theta$ زاویهٔ حاده را، به نام $\tan\theta$ زاویهٔ حاده یاد می کنند. $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$
- در هر مثلث قایم الزاویه نسبت $\cos\theta$ یک زاویهٔ حاده بر $\sin\theta$ زاویهٔ حاده را به نام $\cot\theta$ زاویهٔ حاده یاد می کنند. $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\text{an}\,\theta$
- زاویه‌یی که یک خط مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد، مانند α به نام زاویهٔ میل یاد می‌شود و میل این مستقیم را به نام $\tan\alpha$ یاد می کنند. $(m=\tan\alpha)$
- در هر مثلث قایم‌الزوایه رابطهٔ $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ موجود است.
- نسبت‌های مثلثاتی cos، sin و tan بدون ذکر زاویه در مقابل آن‌ها بی‌معنی اند.
- در معادلهٔ خط مستقیم $y=mx+b$ ، m تانجانت زاویه‌یی است که خط مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد و b تقاطع با محور y می‌باشد.
- $\sin 30^\circ$ با $\cos 60^\circ$ مساوی است.
- $\cos 30^\circ$ با $\sin 60^\circ$ مساوی است.
- $\cos 45^\circ$ با $\sin 45^\circ$ مساوی است.

• در سؤال‌های زیر به هر سوال چهار جواب داده شده، که یکی از آن‌ها صحیح است، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- نسبت $\sin\alpha$ یک زاویهٔ حاده عبارت است از:

a) $\dfrac{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$　　c) $\dfrac{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}{\text{طول وتر}}$

b) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مجاور زاویهٔ حاده}}$　　d) $\dfrac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مقابل زاویهٔ حاده}}$

2- نسبت $\tan x$ مساوی است به:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$　　b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$　　c) $\dfrac{1}{\sin x}$　　d) $\dfrac{1}{\cos x}$

3- در معادلهٔ $2y = 3x - 1$ میل مستقیم عبارت است از:

a) $\dfrac{3}{2}$　　b) -1　　c) 1　　d) a و b

4- معادلهٔ خط مستقیمی که محور y را در نقطهٔ $(0,3)$ قطع می‌کند و با جهت مثبت محور x زاویهٔ 45° تشکیل می‌دهد، کدام است.

a) $y = x + 3$　　b) $2y = 2x - 3$　　c) $2x - y = 0$　　d) هیچ کدام

5- قیمت افادهٔ $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ مساوی است به:

a) 1　　b) 2　　c) -2　　d) -1

6- $\sin 45^\circ$ و $\cos 45^\circ$ مساوی است به:

a) 1　　b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$　　d) $\sqrt{2}$

7- قیمت افادهٔ $\dfrac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ مساوی است به:

a) 0　　b) 1　　c) -1　　d) هر سه جواب صحیح است.

• جاهای خالی را با جمله‌های مناسب تکمیل کنید.

1- در یک مثلث قایم‌الزاویه مجموع دو زاویهٔ حادهٔ آن .... است.

2- در یک مثلث متساوی‌الاضلاع طول یک ضلع آن $10cm$ است. طول ارتفاع آن .... است.

3- نسبت ساین یک زاویهٔ حاده عبارت است از.................................... .

4- Trigonometry از دو کلمهٔ .... و .... تشکیل گردیده است.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوی به........................است .

• کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام آن‌ها غلط اند، در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) را بگذارید.

1- (   ) نسبت $\sin x$ مساوی به $\frac{\text{طول ضلع مقابل } \theta}{\text{طول وتر}}$ است.

2- (   ) $\sin 30^\circ$ و $\cos 60^\circ$ با هم مساوی اند.

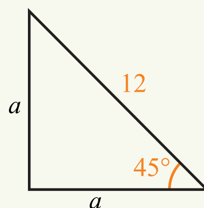
3- (   ) در معادلهٔ $2y = 5x - 1$ میل خط مستقیم $\frac{2}{5}$ است.

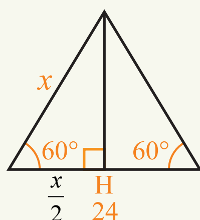
4- (   ) نسبت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ مساوی به $\tan\theta$ است.

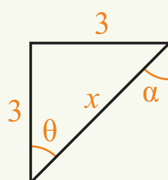
5- (   ) $1 + \cos^2\theta$ مساوی به $\sin^2\theta$ است.

• سؤال‌های زیر راحل نمایید:

1- در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را دریافت نمایید.







2- در سؤال‌های زیر قیمت‌های A و B را محاسبه کنید:

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- اگر $\sin x = \frac{7}{12}$ باشد $\cos x$ و $\tan x$ را دریابید.

4- اگر $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد نسبت‌های مثلثاتی $\sin x$ و $\tan x$ را دریابید.

5- اگر زاویهٔ α به صفر نزدیک شود $\tan \alpha$ به کدام عدد نزدیک می‌شود؟ از روی شکل ادعای خود را ثابت کنید.

6- در شکل زیر اگر $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، فاصله‌های AC و BC را محاسبه کنید.

